

Compito Matematica Discreta 9-04-2009

Esercizio 1

Risolvere almeno due dei seguenti problemi.

- Fattorizzare il polinomio $x^4 - x^3 + 4x^2 - 2x - 2$ in $\mathbb{Q}[x]$.
- Fattorizzare il polinomio $x^4 - x^3 + x^2 - 2x - 2$ in $\mathbb{Z}_3[x]$.
- Considerare il polinomio

$$q(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 6 = (x^2 + 2x - 2)(x^2 + 2x + 3).$$

Per ciascuno degli anelli $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$, stabilire se la fattorizzazione data è completa e in caso negativo trovare la decomposizione di $q(x)$ in fattori irriducibili.

Esercizio 2.

Discutere al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ se il seguente sistema è risolubile e se ha una o infinite soluzioni.

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ ax + y - 3z = 3 - b \\ (a+1)y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.

Sia $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali e sia W il sottoinsieme definito da:

$$W = \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) : \text{traccia}(A) = 0\}.$$

Sia poi

$$V = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

- Provare che W è un sottospazio vettoriale di $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ e trovarne una base.
- Trovare una base di $V + W$ e calcolare la dimensione di $W \cap V$.