PRIMO SCRITTO - 9 GIUGNO 2020

(1) Sia $n \geq 1$, sia $\mathbb{R}^n$ dotato della topologia euclidea, e sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme.

(a) [9 punti] Si mostri che lo spazio quoziente $\mathbb{R}^n/A$ ottenuto collassando A ad un punto è normale se e solo se A è chiuso.

(b) [6 punti] È vero che, se A è chiuso, allora $\mathbb{R}^n/A$ è metrizzabile?

Soluzione. (a) Sia $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/A$ la proiezione al quoziente. Se $\mathbb{R}^n/A$ è normale, in particolare è T_1, per cui il punto $[A] \in \mathbb{R}^n/A$ è chiuso. Poiché π è continua, ne segue che $A = \pi^{-1}([A])$ è chiuso.

Viceversa, supponiamo che A sia chiuso, e siano C, D chiusi disgiunti di $\mathbb{R}^n/A$. Poiché π è continua, gli insiemi $C' = \pi^{-1}(C)$, $D' = \pi^{-1}(D)$ sono chiusi disgiunti di $\mathbb{R}^n$. Poiché $\mathbb{R}^n$ è normale, esistono aperti disgiunti M, N di $\mathbb{R}^n$ con $C' \subseteq M$, $D' \subseteq N$.

Supponiamo ora che $[A]$ appartenga a C o a D. Senza perdita di generalità possiamo supporre $[A] \in C$. Avremo allora $A \subseteq M$ e $A \cap N = \emptyset$, per cui sia M sia M sono aperti saturi. Dunque $\pi(M) \supseteq C$ e $\pi(N) \supseteq D$ sono aperti digiunti di $\mathbb{R}^n/A$, e possiamo perciò separare C e D tramite aperti.

Supponiamo poi che né C né D contengano $[A]$, e siano $M' = M \setminus A$, $N' = N \setminus A$. Poiché A è chiuso, M' ed N' sono aperti. Inoltre, sono saturi e disgiunti. Dunque $\pi(M')$ e $\pi(N')$ sono aperti disgiunti di $\mathbb{R}^n/A$ tali che $\pi(M') \supseteq C$, $\pi(N') \supseteq D$. Ciò conclude la dimostrazione che $\mathbb{R}^n/A$ è T_4. Per concludere, basta verificare che $\mathbb{R}^n/A$ sia anche T_1, ovvero che i punti di $\mathbb{R}^n/A$ siano chiusi. Tuttavia, se $p \in \mathbb{R}^n/A$ è diverso da $[A]$, allora $\pi^{-1}(p)$ è un punto di $\mathbb{R}^n$, ed è perciò chiuso in $\mathbb{R}^n$, per cui p è chiuso nel quoziente. Se invece $p = [A]$, allora $\pi^{-1}(p) = A$ è chiuso in $\mathbb{R}^n$ per ipotesi, per cui ancora $[A]$ è chiuso in $\mathbb{R}^n/A$, da cui la conclusione.

(b): No. Infatti, sia $n = 2$ e sia $A = \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Abbiamo visto a lezione che $\mathbb{R}^2/A$ non è primo numerabile, per cui non può essere nemmeno metrizzabile.

(2) [15 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x \,.$$

(Suggerimento: potete utilizzare come contorno di integrazione un rettangolo con base lungo l'asse delle x ed altezza di lunghezza π.)

Soluzione: È immediato verificare che gli integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x$$

convergono (anche assolutamente). Visto che la funzione seno è dispari, si ha inoltre

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x = 0 \,,$$

per cui

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\imath x}}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{\imath x}}{e^x + e^{-x}} \mathrm{d}x \,.$$

Consideriamo il contorno costituito dal rettangolo di vertici $-R, R, R + \pi\imath, -R + \pi\imath$. Parametrizziamo il suo bordo, γ_R, con

$$\gamma_R = \gamma_1 \star \gamma_2 \star \gamma_3 \star \gamma_4 \,,$$

dove

- γ_1 parametrizza il segmento orientato da $-R$ a R,
- γ_2 parametrizza il segmento orientato da R a $R + \pi\imath$,
- γ_3 parametrizza il segmento orientato da $R + \pi\imath$ a $-R + \pi\imath$,
- γ_4 parametrizza il segmento orientato da $-R + \pi\imath$ a $-R$.

Definiamo la funzione meromorfa

$$f(z) := \frac{e^{\imath z}}{e^z + e^{-z}}$$

e calcoliamone i residui. I poli di f soddisfano l'equazione

$$e^z + e^{-z} = 0 \,,$$

cioè, $e^{2z} = -1$. Quindi, f ha poli nei punti $\imath(\pi/2 + k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$. All'interno della regione delimitata da γ_R abbiamo un unico polo, $\imath\pi/2$, che è semplice. Inoltre, sfruttando la formula che calcola il residuo di una funzione meromorfa della forma p/q in un suo polo semplice, otteniamo

$$\mathsf{Res}(f, \imath\pi/2) = \frac{e^{\imath(\imath\pi/2)}}{e^{\imath\pi/2} - e^{-\imath\pi/2}} = \frac{e^{-\pi/2}}{2\imath} \,.$$

Di conseguenza, per il teorema dei residui abbiamo

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{\gamma_R} f(x)\mathrm{d}z = 2\pi\imath \, \mathsf{Res}(f, \imath\pi/2) = 2\pi\imath \left(\frac{e^{-\pi/2}}{2\imath} \right) = \pi e^{-\pi/2} \,.$$

da cui
$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathsf{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathsf{d}z = \pi e^{-\pi/2} - \int_{\gamma_2} f(z)\mathsf{d}z - \int_{\gamma_4} f(z)\mathsf{d}z\,. \tag{0.1}$$
Notiamo ora che
$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathsf{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\imath x}}{e^x + e^{-x}}\mathsf{d}x\,.$$
Inoltre, poiché $\overline{\gamma}_3 \colon [-R, R] \ni t \mapsto t + \pi\imath$, abbiamo
$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} f(z)\mathsf{d}z &= -\int_{\overline{\gamma}_3} f(z)\mathsf{d}z = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{-\pi}e^{\imath t}}{e^t e^{\imath\pi} + e^{-t}e^{-\imath\pi}}\mathsf{d}t = e^{-\pi}\int_{-R}^{R} \frac{e^{\imath t}}{e^t + e^{-t}}\mathsf{d}t \\ &= e^{-\pi}\int_{\gamma_1} f(z)\mathsf{d}z\,.\end{aligned}$$
Dunque
$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathsf{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathsf{d}z = \left(1 + e^{-\pi}\right)\int_{\gamma_1} f(z)\mathsf{d}z = \left(1 + e^{-\pi}\right)\int_{-R}^{R} \frac{e^{\imath x}}{e^x + e^{-x}}\mathsf{d}x\,. \tag{0.2}$$
Adesso, vogliamo mostrare che gli integrali di f lungo γ_2 e γ_4 tendono a zero per $R \to \infty$. Notiamo che $\gamma_2 \colon t \in [0, \pi] \mapsto R + \imath t$, quindi
$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathsf{d}z = \int_0^{\pi} \frac{e^{\imath R}e^{-t}}{e^R e^{\imath t} + e^{-R}e^{-\imath t}}\imath\mathsf{d}t\,.$$
Di conseguenza, abbiamo la seguente stima:
$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\mathsf{d}z\right| \le \int_{\gamma_2} |f(z)|\mathsf{d}z \le \pi \max_{t\in[0,\pi]} \left|\frac{e^{\imath R}e^{-t}}{e^R e^{\imath t} + e^{-R}e^{-\imath t}}\right| \le \pi \max_{t\in[0,\pi]} \frac{e^{-t}}{e^R|e^{\imath t} + e^{-2R}e^{-\imath t}|}\,.$$
Usiamo la diseguaglianza triangolare:
$$|e^{\imath t}| \le |e^{\imath t} + e^{-2R}e^{-\imath t}| + |-e^{-2R}e^{-\imath t}|\,,$$
otteniamo
$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\mathsf{d}z\right| \le \pi\frac{1}{e^R(1 - e^{-2R})}\,.$$
Di conseguenza l'integrale di $f(z)$ lungo γ_2 tende a zero per $R \to \infty$. In modo simile si prova che l'integrale di $f(z)$ lungo γ_4 tende a zero per $R \to \infty$.

Possiamo ora passare al limite per $R \to \infty$ nell'uguaglianza (0.1) ottenendo, grazie a (0.2):
$$(1 + e^{-\pi})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\mathsf{d}x = \pi e^{-\pi/2}\,,$$
cioè
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}}\mathsf{d}x = \frac{\pi e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi}}\,.$$

(3) Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento tra spazi connessi per archi e localmente connessi per archi, sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme connesso per archi e sia $x_0 \in A$. Poniamo $\widetilde{A} = p^{-1}(A)$.

(a) [6 punti] Si mostri che la restrizione $p|_{\widetilde{A}}\colon \widetilde{A} \to A$ è un rivestimento.

(b) [9 punti] **Si supponga ora che** $p\colon E \to X$ **sia il rivestimento universale.** Si mostri che $\widetilde{A}$ è connesso per archi se e solo se la mappa $i_*\colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ indotta dall'inclusione $i\colon A \to X$ è surgettiva.

Soluzione: (a): Sia $a \in A$, e sia U un intorno aperto ben rivestito di a in X. Avremo allora $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in I} W_i$, con $W_i \subseteq E$ aperto per ogni $i \in I$ e $p|\colon W_i \to U$ omeomorfismo. Sia $V = U \cap A$, e sia $W_i' = W_i \cap \widetilde{A}$ per ogni $i \in I$. Per definizione di topologia di sottospazio, l'insieme V è un intorno aperto di a in A, e W_i' è aperto in $\widetilde{A}$ per ogni $i \in I$. Inoltre, per ogni $i \in I$ la mappa $p|\colon W_i' \to V$ (essendo una restrizione bigettiva dell'omeomorfimo $W_i \to U$) è un omeomorfismo. La tesi segue ora dall'uguaglianza

$$p^{-1}(V) = p^{-1}(U \cap A) = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(A) = \left(\bigsqcup_{i\in I} W_i\right) \cap \widetilde{A} = \bigsqcup_{i\in I} W_i' \,.$$

(b): Sfortunatamente, per una svista nel testo proposto in aula l'ipotesi in grassetto è stata omessa. Senza tale ipotesi, l'implicazione "solo se" è falsa (per costruire un controesempio, basta scegliere uno spazio non semplicemente connesso X, e porre $E = X$, $p = \mathrm{Id}$ e $A = \{x_0\}$, dove x_0 è un qualsiasi punto di X).

Sia $F = p^{-1}(x_0)$ la fibra di x_0 in E (ed in $\widetilde{A}$). Discende direttamente dalle definizioni che, per ogni $\widetilde{x} \in F$ ed ogni $\alpha \in \pi_1(A, x_0)$, si ha $\widetilde{x} \cdot i_*(\alpha) = \widetilde{x} \cdot \alpha$, dove il simbolo $\cdot$ indica l'azione di monodromia su F sia di $\pi_1(A, x_0)$ sia di $\pi_1(X, x_0)$.

Supponiamo che i_* sia surgettiva. Allora dalla transitività dell'azione di $\pi_1(X, x_0)$ su F (garantita dal fatto che E è connesso per archi) discende la transitività dell'azione di $\pi_1(A, x_0)$, che implica a sua volta la connessione per archi di $\widetilde{A}$.

Viceversa, supponiamo ora che E sia semplicemente connesso, e che $\widetilde{A}$ sia connesso per archi. Fissiamo $\widetilde{x} \in F$ e sia $\beta \in \pi_1(X, x_0)$. Poiché $\widetilde{A}$ è connesso per archi, l'azione di $\pi_1(A, x_0)$ su F è transitiva, per cui esiste $\alpha \in \pi_1(A, x_0)$ tale che $\widetilde{x} \cdot \alpha = \widetilde{x} \cdot \beta$, da cui $\widetilde{x} \cdot i_*(\alpha) = \widetilde{x} \cdot \beta$. Poiché il rivestimento E è universale, l'azione di $\pi_1(X, x_0)$ su F è libera, per cui $i_*(\alpha) = \beta$. Ciò prova la surgettività di i_*.