Intersezione piano con una quadrica

L'intersezione tra una quadrica Γ ed un piano reale proprio π, non appartenente alla quadrica, è una conica γ.
Se per esempio preso una quadrica e il piano xy si ha:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \longrightarrow \text{piano} \\ a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + a_{44}x_4^2 = 0 \end{cases}$$

conica.

L'intersezione piano-quadrica da il luogo dei punti del piano che soddisfa l'equazione → è una conica

L'intersezione quadrica-piano improprio è costituito da solo punti impropri

$x_4 = 0$

Se il piano improprio non appartiene alla quadrica, l'intersezione è una conica all'infinito e si indica con C_∞

- Se il polinomio che rappresenta C_∞ non è scomponibile in fattori
  C_∞ si dice non spezzato reale o immaginario → A_{44} → $\tau = 3$
- Nel caso contrario C_∞ rappresenta due rette distinte o coincidenti, immaginarie coniugate
  C_∞ si dice spezzato, rispettivamente in due rette reali, distinte o coincidenti o immaginarie coniugate

A_{44} → $\tau : 2$ C_∞ spezzato in due rette distinte
$\tau : 1$ C_∞ spezzato in due rette coincidenti

Fascio di Coniche

Siano γ_1 e γ_2 due coniche distinte di equazioni $X_T A X = 0$ e $X_T B X = 0$
Si dice fascio di coniche individuato da γ_1 e γ_2 la totalità delle coniche
le cui equazioni sono combinazione lineare delle coniche date cioè

$$\lambda X_T A X + \mu X_T B X = 0 \qquad \text{con } \lambda \text{ e } \mu \text{ non entrambi nulli}$$

Ogni punto a comune a γ_1 e γ_2 appartiene a tutte le coniche del fascio
Per qualunque punto del piano distinto dai punti base passa una sola conica del fascio

- In un fascio vi è almeno una e non più di tre coniche spezzate, distinte o coincidenti, oppure tutte le coniche del fascio sono spezzate

$$A \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{13} + \mu b_{13} \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} & \lambda a_{23} + \mu b_{23} \\ \lambda a_{31} + \mu b_{31} & \lambda a_{32} + \mu b_{32} & \lambda a_{33} + \mu b_{33} \end{vmatrix}$$

- Una conica del fascio è degenere se $\det A = 0$ (deve imporlo)

L'intersezione di due coniche mi dà quattro punti reali o immaginari
L'equazione del fascio rappresenta un'altra conica che passa dai reali punti di intersezione → i punti base

Per 4 punti passano ∞ coniche basta che fisso il 5° e trovo un unica conica passante per 5 punti

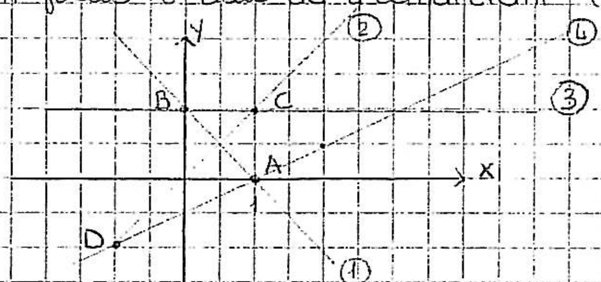
Trovo le soluzioni — se $\det A = 0$ le coniche sono degeneri
il fascio fatto da coniche spezzate

ESEMPIO — se $\det A = 0$ $r = 3$ ho un eq. omogenea in λ e μ

① Ho 4 punti

$A(1, 0)$ $B(0, 1)$ $C(1, 1)$ $D(-1, -1)$

Un fascio è dato da 4 condizioni (può essere il passaggio da quattro punti)



$m = \frac{y}{x}$

Un modo per fare il fascio è quello di partire dalle coniche degeneri
Scrivo l'equazione di una conica formata dalla retta ① e ②

$* \; y = x \rightarrow y - x = 0 \qquad * \; y = -x + 1 \rightarrow y + x - 1 = 0$

la primo conico è $C_1 = (y-x)(y+x-1)=0$

Devo trovare un altro conico considero le rette ③, ④

$*\quad y=1 \rightarrow y-1=0 \qquad *\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \rightarrow y-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=0$

$\rightarrow 2y-x+1=0$

la secondo conico è $C_2=(y-1)(2y-x+1)=0$

Dopodiche il fascio diventa : $C_1+\lambda C_2=0$

sviluppo i conti e separo le parti con i coefficienti

quando separo secondo x^2, y^2, $\frac{xy}{2}$, x, y $\rightarrow$ costruisco la matrice

i termini misti li devo sempre dividere per due senno non tornano i conti

la matrice sarò (3×3) con solo parametro λ

se $\det(2\times 2)=0$

se $\det(3\times 3)=0$

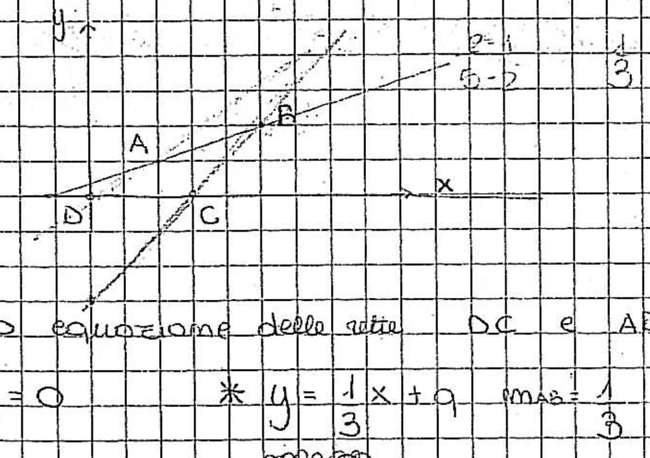
e trovo le condizioni di λ

- Per la circonferenza ho $\det(2\times 2)>0$ e x^2 e y^2 con i coefficienti uguali e xy con coefficiente $=0$ (non ci sono termini misti nella circ.

② ESEMPIO

Scrivere il fascio di coniche passante per i punti

A (2,1) B (5,2) C (3,0) D (0,0)



Scrivo equazione delle rette DC e AB

$*\quad y=0 \qquad *\quad y=\frac{1}{3}x+q \quad m_{AB}=\frac{1}{3} \qquad (y-1)=\frac{1}{3}(x-2)$

$y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

la conica è $y(y-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})=0$ $\quad y(3y-x-1)=0$ $\quad C_2$

Scrivo equazione CB, AD

$*$ CB $=$ $y=\frac{1}{3}x+q \rightarrow (y-y_C)=m(x-x_C) \rightarrow y=x-3$

$*$ AD $=$ $m_{AD}=\frac{1}{2} \qquad y=\frac{1}{2}x \qquad$ la primo conica $(y-x+3)(y-\frac{1}{2}x)=0 \quad C_1$

Il fascio si può scrivere

$$\lambda(y(3y-x-1))+\mu(y-x+3)(y-\frac{1}{2}x)=0$$

3) ~~Esercizio~~

Ho il fascio

$$(x-3y+1)y+\lambda(x+y-3)(2x-5y)=0$$

$$xy-3y^2+y+2\lambda x^2-5\lambda xy+2\lambda xy-5\lambda y^2-6\lambda x+15\lambda y=0$$

ordino secondo il grado delle incognite

$$2\lambda x^2+y^2(-3-5\lambda)+xy(1-3\lambda)-6\lambda x+y(1+15\lambda)=0$$

Faccio la matrice

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 1-3\lambda & -6\lambda \\ 1-3\lambda & -3-5\lambda & 1+15\lambda \\ -6\lambda & 1+15\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

Trovo le condizioni di λ

$$-6\lambda[(1-3\lambda)(1+15\lambda)-(-3-5\lambda)(-6\lambda)]-(1+15\lambda)[(2\lambda)(1+15\lambda)-(1-3\lambda)(-6\lambda)]$$

$$-6\lambda[1+15\lambda-3\lambda-45\lambda^2-18\lambda-30\lambda^2]-(1+15\lambda)[2\lambda+30\lambda^2+6\lambda-18\lambda^2]$$

$$6\lambda-90\lambda^2+18\lambda^2+270\lambda^3+108\lambda^2+180\lambda^3-2\lambda-30\lambda^2-30\lambda^2-450\lambda^3-6\lambda-90\lambda^2$$
$$+18\lambda^2+270\lambda^3=0$$

$$170\lambda^3$$

③ ESEMPIO

Dato il fascio di coniche dell'equazione

$$x^2 + Ky^2 + 2xy - 2x + 1 + 10K = 0$$

si studino le coniche del fascio $x_1^2 + Kx_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + 10Kx_3^2 = 0$

- Scrivo la matrice A $x_1^2 + Kx_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_3^2(1+10K) = 0$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & K & 0 \\ -1 & 0 & 1+10K \end{vmatrix} \quad \det A = -1(+K) + (1+10K)(K-1)$$

$$= \cancel{-K} + \cancel{K} + 10K^2 - 1 - 10K$$

$$= 10K^2 - 10K - 1 = 0$$

$$K = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(-10)}}{20}$$

60 | 2×5
6 | 2
3 | 3 $2^2 \cdot 5 \cdot 3$
1

$$\frac{10 \pm \sqrt{140}}{20} = \frac{10 \pm 2\sqrt{35}}{20} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{10}\sqrt{35}$$

Per $K = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{10}\sqrt{35}$ → ho una conica spezzata $\det A = 0$

per $K \neq \frac{1}{2} \pm \frac{1}{10}\sqrt{35}$ → conica non degenere

La classifico guardando A_{33} $K-1 \gtrless = 0$

$A_{33} = K - 1$

$K = 1$	$A_{33} = 0$	è una parabola	le coniche del fascio sono parabole e ellissi e iperboli
$K > 1$	$A_{33} > 0$	è un ellisse	
$K < 1$	$A_{33} < 0$	è un iperbole	

ESERCIZI

① Ho il fascio

$$x^2+2xy+2y+k(y^2+2y)=0$$

$$\downarrow$$

$$x^2+2xy+\underbrace{2y+ky^2+2ky}=0$$

fascio la matrice

$$y(2+2k)$$

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1+1k \\ 0 & 1+1k & 0 \end{vmatrix} ; \quad \det A \quad -(1+1k)(1+1k)$$

$$=-(1+1k)^2 \quad 1+k^2+2k^2$$

Per $k=-1$ le coniche sono degeneri

Per $k\neq-1$ le coniche sono non degeneri

in particolare $(-1-1k)(1+1k)$

$$-1-1k-1k+1k^2=0$$

$$+1+2k+k^2=0 \qquad k^2+2k+1=0$$

$$k=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(1)}}{2} \qquad k=-1 \text{ è degenere}$$

Poi guardo A_{33} $\quad k-1=0 \qquad k=1$ sono parabole

$k>1$ ellissi

per classificazione vedi coniche

$k<1$ iperboli

ESEMPIO

Studiare il fascio di coniche

$(\alpha-1)x^2 + 2y^2 - (5-\alpha)x + \alpha y + \alpha - 2 = 0$

Stabilire per quali valori del parametro α il fascio rappresenta

1) Una circonferenza

2) Una parabola

3) Una retta

1) L'equazione generale della circonferenza

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Quindi deve essere

$(\alpha - 1) = 2 \qquad \alpha = 3$

$2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y = 0$

2) L'equazione di una parabola

$y = \alpha x^2 + bx + c$

$\alpha x^2 + bx - y + c = 0$

il fascio non rappresenta delle parabole perché non si annulla mai y^2

3) Uguale a sopra

② Scrivere l'equazione della circonferenza passante per A (3, 4) appartenente al fascio individuato dalle circonferenze

$C_1 \quad 3(x^2+y^2)-4x-2y=0$

$C_2 \quad x^2+y^2-2x+3=0$

il fascio è

$$\lambda\left[3(x^2+y^2)-4x-2y\right]+\mu\left[x^2+y^2-2x+3\right]=0$$

devo trovare i valori λ e μ che soddisfano l'equazione con $x=3 \quad y=4$

$$\lambda\left(3(9+16)-12-8\right)+\mu\left(9+16-6+3\right)=0$$

$$55\lambda+22\mu=0$$

$$\begin{cases}\lambda=2\\ \mu=-5\end{cases}$$

e sostituito viene

$$6(x^2+y^2)-8x-4y-5x^2-5y^2+10x-15=0$$

$$x^2+y^2+2x-4y-15=0$$