Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra lineare e Analisi II - A.A. 2009/2010

ESERCITAZIONE 5.3

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2.

Proposizione	Vera	Falsa
$(1,1)$ è punto di max relativo $\Rightarrow \nabla f(1,1) = 0$	X	
$\nabla f(1,1) = 0 \Rightarrow (1,1)$ è punto di max relativo		X
$H_f(1,1)$ definita negativa $\Rightarrow (1,1)$ è punto di max relativo		X
$\nabla f(1,1) = 0$ & $H_f(1,1)$ definita negativa $\Rightarrow (1,1)$ è punto di max relativo	X	
$\nabla f(1,1) = 0$ & $H_f(1,1)$ definita positiva $\Rightarrow (1,1)$ è punto di max relativo		X

- Per ciascuna delle seguenti $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ determinare, se esistono, $\sup, \inf, \max, \min$ di $f(x,y)$.

	$f(x,y)$	sup	inf	max	min
1	$x-y$	$+\infty$	$-\infty$	NE	NE
2	$x+2y$	$+\infty$	$-\infty$	NE	NE
3	$\sin(x+2y)$	1	-1	1	-1
4	$\cos(x+2y)$	1	-1	1	-1
5	x^2+y^2	$+\infty$	0	NE	0
6	x^2-y^2	$+\infty$	$-\infty$	NE	NE
7	xy	$+\infty$	$-\infty$	NE	NE
8	$-x^2-y^2$	0	$-\infty$	0	NE
9	$-(x-y)^2$	0	$-\infty$	0	NE
10	$x^2+2xy+y^2$	$+\infty$	0	NE	0
11	$3x^2+2xy+3y^2$	$+\infty$	0	NE	0
12	x^4+y^4	$+\infty$	0	NE	0
13	x^3+y^4	$+\infty$	$-\infty$	NE	NE
14	$\sin(x^6-y^4)$	1	-1	1	-1
15	$\arctan(x^4+y^4)$	$\pi/2$	0	NE	0
16	$\arctan(x^3+y^4)$	$\pi/2$	$-\pi/2$	NE	NE
17	$\ln(x^4+y^4)$	$+\infty$	$-\infty$	NE	NE
18	$2y+\arctan(x^3)$	$+\infty$	$-\infty$	NE	NE
19	$e^{(x^2+y^2)}$	$+\infty$	1	NE	1
20	$e^{(-x^2-y^2)}$	1	0	1	NE
21	$e^{(-x+y^2)}$	$+\infty$	0	NE	NE
22	$e^{(xy)}$	$+\infty$	0	NE	NE
23	$e^{(-xy+y^2)}$	$+\infty$	0	NE	NE
24	$\sqrt{(x^2+y^2)}$	$+\infty$	0	NE	0
25	$\sqrt{(x^4+y^4)}$	$+\infty$	0	NE	0
26	$\arctan(\sin(x+y))$	$\pi/4$	$-\pi/4$	$\pi/4$	$-\pi/4$

Proposizione	Vera	Falsa
1. La funzione $f(x,y) = x^2$ ha un unico punto stazionario		X
2. La funzione $f(x,y) = \sin(x+y)$ ha un unico punto stazionario		X
3. La funzione $f(x,y) = x^2$ ha infiniti punti stazionari	X	
4. La funzione $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 5y^2$ ha un unico punto stazionario	X	
5. La funzione $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ ha un unico punto stazionario		X
6. La funzione $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ ha infiniti punti stazionari	X	
7. La funzione $f(x,y) = x + 2y$ ha un unico punto stazionario		X
8. La funzione $f(x,y) = \arctan(x+2y)$ ha un unico punto stazionario		X
9. $(0,0)$ è un punto di minimo per la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$	X	
10. $(0,0)$ è un punto di minimo per la funzione $f(x,y) = xy$		X
11. $(0,0)$ è un punto di minimo per la funzione $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$	X	

$f(x,y) = 5x^2 + xy + y^2 \implies H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$f(x,y) = x + x^2 + xy + y^2 \implies H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$f(x,y) = x^4 + xy + y^3 \implies H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$f(x,y) = x^4 + xy + y^3 \implies H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$
$f(x,y) = \sin(x) + xy + y^3 \implies H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$f(x,y) = \sin(x^2) + xy + y^2 \implies H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \implies H_f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$	$f(x,y) = x^5 + x^2y + y^2 \implies H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

• Per ciascuna delle seguenti $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ determinare i punti stazionari e specificare quali sono i punti di massimo e minimo relativo.

	$f(x,y)$	punti stazionari	max	min
1	$5x^2 + xy + y^2$	$(0,0)$		$(0,0)$
2	$x + x^2 + xy + y^2$	$(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$		$(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
3	$e^{-x^2-xy-y^2}$	$(0,0)$	$(0,0)$	
4	$x \cdot e^{-2x^2-y^2}$	$(\frac{1}{2},0)$ $(-\frac{1}{2},0)$	$(\frac{1}{2},0)$	$(-\frac{1}{2},0)$
5	$2x - y^2 - 1$	NE		
6	$(x-y^2)^2 + (x-1)^2$	$(\frac{1}{2},0)$ $(1,1)$ $(1,-1)$		$(1,1)$ $(1,-1)$
7	$x^4 - 2x^2 - y^2$	$(0,0)$ $(1,0)$ $(-1,0)$	$(0,0)$	
8	$(x^2-y)^2 + (x^2-1)^2$	$(0,0)$ $(1,1)$ $(-1,1)$		$(1,1)$ $(-1,1)$
9	$x^2y - y^2 - y - 1$	$(0,-\frac{1}{2})$ $(1,0)$ $(-1,0)$	$(0,-\frac{1}{2})$	
10	$(x-1)^2(1-x^2-y^2)$	$(-\frac{1}{2},0)$ $(1,y)$ con $y \in \mathbb{R}$	$(-\frac{1}{2},0)$ $(1,y)$ con $y \neq 0$	
11	$\arctan(5x^2+xy+y^2)$	$(0,0)$		$(0,0)$
12	$\arctan(x+x^2+xy+y^2)$	$(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$		$(\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$
13	$9(x-1) - x^2 - y^2$	$(\frac{9}{2},0)$	$(\frac{9}{2},0)$	
14	$\ln(2+x+x^2+y^2)$	$(-\frac{1}{2},0)$		$(-\frac{1}{2},0)$

• Dati i punti $P_1 = (2,1), P_2 = (1,2), P_3 = (4,4)$ determinare il punto di minimo della funzione $f(X) = \sum_{i=1}^{3} d(X,P_i)^2$, dove $X \in \mathbb{R}^2$.

$$X = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right).$$