Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra lineare e Analisi II

anno accademico 2009/2010

ESERCITAZIONE 4.4

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Proposizione	Vera	Falsa
Per due punti distinti di $\mathbb{R}^2$ passa un' unica retta	•	☐
Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa un' unica retta	•	☐
Per due punti distinti di $\mathbb{R}^3$ passa un unico piano	☐	•
Per tre punti non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa un unico piano	•	☐
Per quattro punti non allineati di $\mathbb{R}^3$ passa un unico piano	☐	•
In $\mathbb{R}^2$, data una retta r e un punto $P \in r$, esiste un' unica retta ortogonale e r e passante per P	•	☐
In $\mathbb{R}^3$, data una retta r e un punto $P \in r$, esiste un' unica retta ortogonale e r e passante per P	☐	•
In $\mathbb{R}^3$, dato un piano Π e un punto $P \in r$, esiste un' unica retta ortogonale e Π e passante per P	•	☐

• In $\mathbb{R}^2$ determinare l'equazione intrinseca e parametrica della retta passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, e parallela a $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

EQUAZIONE PARAMETRICA: $A + tv = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} x_1 = & 1 - 3t \\ x_2 = & 3 + 4t \end{cases}$

EQUAZIONE INTRINSECA: a ortogonale a v è $= a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Quindi l'equazione è

$4(x_1 - 1) + 3(x_2 - 3) = 0$ cioè $4x_1 + 3x_2 - 13 = 0$

• In $\mathbb{R}^2$ determinare l'equazione intrinseca della retta passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, e perpendicolare a $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

EQUAZIONE INTRINSECA: $-3(x_1 - 1) + 4(x_2 - 3) = 0$ cioè $-3x_1 + 4x_2 - 9 = 0$
EQUAZIONE PARAMETRICA: il vettore direttore della retta, che chiamiamo v_1 deve essere perpendicolare a v: $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Quindi l'equazione parametrica della retta è

$A + tv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} x_1 = & 1 + 4t \\ x_2 = & 3 + 3t \end{cases}$

• In $\mathbb{R}^3$ determinare un'equazione intrinseca e una parametrica del piano passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, e perpendicolare a $v = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

EQUAZIONE INTRINSECA: $-6(x_1 - 1) + 4(x_2 - 3) + 5(x_3 - 5) = 0$ cioè $-6x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 31 = 0$
EQUAZIONE PARAMETRICA: Cerchiamo due vettori indipendenti perpendicolari a v:

$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Quindi un'equazione parametrica del piano è:

$A + tv_1 + sv_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} x_1 = & 1 + 4t \\ x_2 = & 3 + 6t - 5s \\ x_3 = & 2 + 4s \end{cases}$

- In $\mathbb{R}^3$ determinare un'equazione intrinseca e una parametrica di una retta passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, e perpendicolare al piano di equazione $\{x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$

EQUAZIONE PARAMETRICA: Sia v il vettore ortogonale al piano, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Allora l'equazione parametrica della retta è:

$$A + tv = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ cioè } \begin{cases} x_1 = & 1 + t \\ x_2 = & 2 + t \\ x_3 = & 2 - 2t \end{cases}$$

EQUAZIONE INTRINSECA: La retta r la otteniamo come sistema di due equazioni in due incognite (corrispondente all'intersezione di due piani).

I modo. Ponendo $t = 1$ otteniamo il punto $B = A + v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Imponendo il passagio per A e per B troviamo le equazioni di due piani che soddisfano le condizioni richieste.

II modo. Cerchiamo due vettori a_1, a_2. paralleli al piano di equazione $\{x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$.

a_1, a_2 saranno i vettori perpendicolari alle equazioni dei due piani passanti per A.

Ad esempio $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un'equazione intrinseca è quindi:

$$\begin{cases} (x_1 - 1) - (x_2 - 2) & = 0 \\ 2(x_2 - 2) + (x_3 - 2) & = 0 \end{cases}$$

- In $\mathbb{R}^3$ determinare l'equazione intrinseca e parametrica di una retta passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, e perpendicolare al piano di equazione $\{x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\}$

La retta r è perpendicolare al piano di equazione $\{x_1 + x_2 - 2x_3 = 5\}$ se esoltanto se è perpendicolare la piano di equazione $\{x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$.

Quindi la soluzione dell'esercizio e identica alla soluzione dell'esercizio precedente.

- In $\mathbb{R}^3$ si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la retta r passante per A e B.

(i)il punto $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in r$?

	falso

Infatti, sia $v = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La retta r ha equazioni $A + tv$.

Il punto $C \in r$ se e sole se esiste un $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tale che $C = A = \bar{t}v$, cioè se $\bar{t} \in \mathbb{R}$ risolve il sistema:

$$\begin{cases} 1 + 2t = & 4 \\ 1 + t = & 3 \\ -1 + t = & 2 \end{cases}$$

Tale sistema non ammette soluzione, quindi il punto $C \notin r$.

• In $\mathbb{R}^2$ calcolare l'area del triangolo avente i vertici nei punti $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Poniamo $v_1 = B - A$ e $v_2 = C - A$. Cioè $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

L'area del parallelogramma generato dai vettori v_1 e v_2 è il doppio dell'area del triangolo ABC ! Quindi

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}\Big|\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\Big| = \frac{5}{2}$$

SECONDA PARTE

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ sia $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e r la retta passante per A e B.

Sia s la retta $\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$

(i) Determinare $r \cap s$.

La retta r ha equazioni parametriche: $\begin{cases} x_1 = & 1 \\ x_2 = & 0 + 2t \\ x_3 = & 1 + 2t \end{cases}$

Sostituiamo le espressioni di x_1, x_2, x_3 nel sistema che da le equazioni di s:

$$\begin{cases} 2 & +2(2t) & -(1+2t) & = 4 \\ 1 & +2t & -(1+2t) & = 0 \end{cases}$$

La cui soluzione è $t = \frac{3}{2}$. Cioè il punto della retta r che corrisponde a $t = \frac{3}{2}$, ovvero il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ è il punto di intersezione delle due rette. In particolare le due rette sono incidenti.

(ii) Determinare l' equazione parametrica di una retta perpendicolare a r e s passante per l'origine.

Cerchiamo il vettore direttore di s:

$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 4 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & = 4 \\ -x_1 & -x_2 & & = -4 \end{cases}$ Ponendo $x_1 = t$ parametro si ha $x_2 = 4 - t$, $x_3 = 4$.

Pertanto s ha la seguente descrizione parametrica: $\begin{cases} x_1 = & t \\ x_2 = & 4 - t \\ x_3 = & 4 \end{cases}$ Il vettore direttore di s è quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Un vettore $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ è perpendicolare a s e a r se e sole se è prependicolare ai due vettori direttori, ovvero se risolve il sistema:

$$\begin{cases} & +2x_2 & +2x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & & = 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_2 = t$ si ha $x_1 = t$ e $x_3 = -t$. Pertanto un vettore perpendicolare ad entrambe le rette è $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Imponendo il passaggio per l'origine la retta cercate ha equazione parametrica: $\begin{cases} x_1 = & t \\ x_2 = & t \\ x_3 = & -t \end{cases}$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ siano $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Dimostrare che i 4 punti sono allineati.

Determiniamo un'equazione parametrica della retta passante per A e per B.

Sia $v = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La retta r ha equazioni $A + tv$.

Il punto $C \in r$ se e sole se esiste un $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tale che $C = A = \bar{t}v$, cioè se $\bar{t} \in \mathbb{R}$ risolve il sistema:

$$\begin{cases} 1 + t = & 0 \\ 0 + t = & -1 \\ 1 + 2t = & -1 \end{cases}$$

Tale sistema ha un'unica soluzione $t = -1$, quindi il punto $C \in r$.

Il punto $D \in r$ se e sole se esiste un altro $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tale che $D = A = \bar{t}v$, cioè se $\bar{t} \in \mathbb{R}$ risolve il sistema:

$$\begin{cases} 1 + t = & 3 \\ 0 + t = & 2 \\ 1 + 2t = & 5 \end{cases}$$

Tale sistema ha un'unica soluzione $t = 2$, quindi il punto $D \in r$.

Quindi, poichè C e D appartengono alla retta per A e per B i 4 punti sono allineati.

Esercizio 3. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la retta r

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

(i) La retta r è ortogonale al piano di equazione $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ se e solo se il vettore direttore della retta è proporzionale al vettore ortogonale al piano, ovvero se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per $\lambda = 1, \alpha = 1$ il sistema ha soluzione, quindi per $\alpha = 1$ la retta è ortogonale al piano.

(ii) La retta r è parallela alla retta s $\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases}$ se e solo se il vettore direttore di s è parallelo al vettore direttore di r.

Il vettore direttore di s si ottiene risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases}$

La soluzione del sistema è $x_1 = x_2 = x_3 = t$, Quindi un vettore direttore di s è : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La retta r è parallela alla retta s se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cioè anche in questo caso si ha soluzione per $\alpha = 1$.

Esercizio 4. Determinare la posizione reciproca (coincidenti, parallele non coincidenti, incidenti, sghembe) per ciascuna delle seguenti coppie di rette di $\mathbb{R}^3$.

Per ogni coppia si tratta di determinare l'intersezione. Se l'intersezione è un punto allora sono incidenti. Se l'intersezione è tutta r allora sono coincidenti. Se l'intersezione è l'insieme vuoto occorre vedere i vettori direttori delle due rette per capire se sono parallele o sghembe.

1)	$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	incidenti
2)	$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$	sghembe
3)	$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\7\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$	coincidenti
4)	$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$	parallele
5)	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\\ x_1 - x_3 = 0\end{cases}$	parallele
6)	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2\\ x_1 - x_3 = 1\end{cases}$	coincidenti
7)	$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{cases}x_1 - x_2 + 3x_3 = 5\\ x_1 - x_3 = 0\end{cases}$	incidenti
8)	$\begin{cases}x_1 - x_2 + 3x_3 = 5\\ x_1 - x_3 = 0\end{cases}$	$\begin{cases}x_1 - x_2 + x_3 = 2\\ x_1 + x_3 = 1\end{cases}$	sghembe

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^3$ sia Π il piano passante per i punti A, B e C seguenti: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Il piano Π ha equazione cartesiana

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 = 0$$

Pertanto:

(i) il punto $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Pi$? $\boxed{}\boxed{\text{falso}}$ (ii) Determinare un vettore perpendicolare a Π : $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Determinare l'equazione di un piano Π' parallelo a Π tale che la distanza tra i due piani $=d(\Pi, \Pi') = 3$.

Il piano Π' è perpendicolare al vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Occorre trovare un punto E che dista 3 dal piano Π.

Per determinare il punto E consideriamo un punto della forma $E = A + tv$ la cui distanza da A sia uguale a 3.
Per definizione la distanza tra E ed A è $d(A, E) = ||E - A||$.
Per costruzione $||E - A|| = ||tv||$.
Ma $||tv|| = |t| \cdot ||v|| = |t| \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = |t| \cdot 3$.

Quindi per $t = \pm 1$ si ha il punto cercato. Ponendo $t = 1$ otteniamo $E = A + v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

L'equazione del piano Π' è quindi

$$2(x_1 - 3) - 2(x_2 + 1) + (x_3 - 3) = 0$$

cioè

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 - 11 = 0$$