Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra lineare e Analisi II

anno accademico 2009/2010

ESERCITAZIONE 4.3

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Proposizione	Vera	Falsa
La forma $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 3x_2y_1 + 3x_2y_2$ è un prodotto scalare	☐	•
La forma $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 3x_2y_2$ è un prodotto scalare	•	☐
La forma $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + -3x_2y_2$ è un prodotto scalare definito positivo	☐	•
La forma $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + -3x_2y_2$ è un prodotto scalare definito negativo	☐	•

• Dato il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 3x_2y_2$

Allora:

Proposizione	Vera	Falsa
$\langle , \rangle$ è definito positivo	☐	•
$\langle , \rangle$ è definito negativo	☐	•
$\langle , \rangle$ è indefinito	•	☐
$\exists\ v \neq 0_V$ tale che $\langle v, v\rangle = 0$	•	☐
$\exists\ v \neq 0_V$ tale che $\langle v, v\rangle = 5$	•	☐
$\exists\ v \neq 0_V$ tale che $\langle v, v\rangle = -5$	•	☐

• Dato il prodotto scalare canonico $\langle\ ,\ \rangle_{CAN} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$

(i) determinare l'insieme dei vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Sia $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Allora $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle_{CAN} = x_1 + 3x_2$.

Pertanto l'insieme dei vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è descritto dall'equazione di $\mathbb{R}^2$:

$$x_1 + 3x_2 = 0$$

(ii) determinare l'insieme dei vettori ortogonali a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e a $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Sia $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Allora $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle_{CAN} = x_1 + 3x_2$, mentre $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle_{CAN} = x_1 - x_2$.
Pertanto un vettore è ortogonale a entrambi se verifica il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & = 0 \\ x_1 - x_2 & = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è 0_V

- Dato il prodotto scalare canonico $\langle\ ,\ \rangle_{CAN} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

(i) determinare l'insieme dei vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sia $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Allora $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{CAN} = x_1 + 3x_2 + x_3$.

Pertanto l'insieme dei vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un piano di $\mathbb{R}^3$ descritto dall'equazione

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

(ii) determinare l'insieme dei vettori ortogonali a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e a $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sia $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.Allora $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{CAN} = x_1+3x_2+x_3$, mentre $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{CAN} = x_1-x_2+2x_3$.
Pertanto un vettore è ortogonale a entrambi se verifica il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases}$$

Si ottiene pertanto una retta di equazioni perametriche: $\begin{cases} x_1 = & -(7/4)t \\ x_2 = & t/4 \\ x_3 = & t \end{cases}$

SECONDA PARTE

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^2$ sia $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(i) Determinare una descrizione intrinseca e una parametrica della retta r passante per A e B.

Consideriamo il vettore $v = B - A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Una descrizione parametrica della retta r è : $A + tv = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, cioè

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 1 + t \end{cases}$$

Per determinare un'equazione intrinseca della retta r consideriamo un vettore $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ortogonale a v.

$\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2a_1 + a_2$. Possiamo scegliere come vettore $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Per determinare l'equazione intrinseca della retta r imponiamo la condizione del passaggio per A e la condizione della perpendicolarità al vettore a :

$$-1 \cdot (x_1 - 1) + 2 \cdot (x_2 - 1) = 0$$

ovvero

$$-x_1 + 2x_2 - 1 = 0$$

(ii) Determinare una descrizione intrinseca e una parametrica della retta s passante per A e perpendicolare a r.
La retta s è perpendicolare al vettore v e passa per A. La sua equazione è:

$$2 \cdot (x_1 - 1) + (x_2 - 1) = 0$$

Per determinare un'equazione parametrica si noti che il vettore direttore è dato dal vettore a.

Quindi s è descritta dall' equazione: $A + ta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, cioè

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = 1 + 2t \end{cases}$$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ si consideri il punto $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(i) Determinare una descrizione intrinseca e una parametrica del piano Π passante per A e parallelo a v_1 e v_2.

Una descrizione parametrica del piano Π è data da: $A + tv_1 + uv_2$ con t, u parametri reali. Cioè $\begin{cases} x_1 = 1 + 3t \\ x_2 = 1 + 2t + u \\ x_3 = 1 + t + u \end{cases}$

Per determinare una descrizione intrinseca occorre un vettore ortogonale al piano, ovvero un vettore ortogonale a v_1 e a v_2. Sfruttando il prodotto scalare canonico tale vettore si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3a_1 + 2a_2 + a_3 &= 0 \\ a_2 + a_3 &= 0 \end{cases}$$

Una soluzione di questo sistema è data dal vettore $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Quindi un'equazione intrinseca del piano Π è:

$$(x_1 - 1) - 3 \cdot (x_2 - 1) + 3(x_3 - 1) = 0$$

cioè

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 1 = 0$$

(iia) Determinare una descrizione intrinseca e una parametrica della retta r passante per A e parallelo a v_1.

Una descrizione parametrica della retta r è : $A + tv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, cioè

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 3t \\ x_2 = 1 + 2t \\ x_3 = 1 + t \end{cases}$$

Per determinare una descrizione intrinseca di r occorre determinare due piani distinti la cui intersezione è r.

Il primo piano è Π. Per determinare il secondo piano sia $B = A + v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dobbiamo determinare un piano passante per A e B. Il generico piano ha equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + c = 0$$

Imponendo il passaggio per A e B si ha il sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + c &= 0 \\ 4a_1 + 3a_2 + 2a_3 + c &= 0 \end{cases}$$

Ponendo $c = 1, a_3 = 1$ otteniamo $a_2 = -5$, $a_1 = 3$. Quindi un secondo piano Π' che passa per A e B è : $3x_1 - 5x_2 + x_3 + 1 = 0$.

Una descrizione intrinseca della retta r è :

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 1 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 1 &= 0 \end{cases}$$

(iib) Determinare una descrizione intrinseca e una parametrica della retta s passante per A e parallelo a v_2

Una descrizione parametrica della retta r è : $A + u \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, cioè

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 + u \\ x_3 = 1 + u \end{cases}$$

Per la descrizione intrinseca vedi (iia)

(iii) il punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in s$? $\in \Pi$?

il punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in s$ se soltanto se esiste un valore del parametro reale u tale che $\begin{cases} 1 = 1 \\ 4 = 1 + u \\ 4 = 1 + u \end{cases}$

Il sistema ammette un'unica soluzione $u = 3$ quindi il punto appartiene alla retta.

Poiché la retta s è contenuta nel piano Π possiamo quindi concludere che il punto $C \in \Pi$.
(iv) Determinare l'equazione intrinseca di un piano paralleo al piano Π e passante per l' origine.

Il piano deve essere ortogonale al vettore $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ e deve passare per l'origine.

Quindi un'equazione intrinseca del piano è:

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ siano $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(i) Determinare una descrizione intrinseca e una parametrica del piano Π passante per A , B e C.

Poniamo $v_1 = B - A$ e $v_2 = C - A$, cioè $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Una descrizione parametrica del piano Π passante per A , B e C è: $A + tv_1 + sv_2$, cioè

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t - s \\ x_2 = 1 + 2t + 2s \\ x_3 = 1 + 2t \end{cases}$$

Per determinare una descrizione intrinseca di Π cerchiamo un vettore a ortogonale a v_1 e a v_2.

Ponendo $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, le condizioni di ortogonalità diventano $\begin{cases} 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 0 \\ -a_1 + 2a_2 \quad = 0 \end{cases}$

La soluzione del sistema è :$t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Per $t = 1$ si ha un vettore a ortogonale al piano.

Imponendo la condizione di ortogonalità al vettore a e il passaggio per A otteniamo l'equazione:

$$-2(x_1 - 1) - x_2 + 3(x_3 - 1) = 0$$

cioè

$$-2x_1 - x_2 + 3x_3 - 1 = 0$$

(ii) Determinare una descrizione intrinseca e una parametrica della retta r passante per A e B.
La retta r è descritta parametricamente dall'equazione $A + tv_1$ cioè

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 1 + 2t \end{cases}$$

(iii) il punto $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \Pi$ se e soltanto se sostituendo le sue coordinate nell'equazione intrinseca di Π l'uguaglianza è verificata. Sostituendo $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 3$ si ha:

$$-2 \cdot 3 - 4 + 3 \cdot 3 - 1 = -2 \neq 0$$

Quindi il punto non appartiene al piano.

(iii) Determinare l'equazione intrinseca e parametrica di un piano paralleo al piano Π e passante per l' origine.

$$-2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ sia $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e r la retta passante per A e B.

Determiniamo prima di tutto un'equazione parametrica della retta r.

$v = B - A = B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quindi l'equazione parametrica è $\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 1 + 2t \end{cases}$

(i) il punto $C = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \in r$ se soltanto se esiste un valore del parametro reale t tale che $\begin{cases} -3 = 1 + 2t \\ -4 = 2t \\ -3 = 1 + 2t \end{cases}$

Il sistema ammette un'unica soluzione $t = -2$ quindi il punto appartiene alla retta.

(ii) Il piano di equazione $\{x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ contiene la retta r se sostituendo $x_1 = 1 + 2t; x_2 = 2t; x_3 = 1 + 2t;$ nell'equazione del piano si ottiene un'identità $0 = 0$. Operando la sostituzione si ha

$$1 + 2t + 2t - (1 + 2t) = 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Quindi la retta è incidente e non è contenuta nel piano.

(iii) Determinare l'equazione di un piano perpendicolare alla retta r e passante per A.

Il piano deve essere ortogonale al vettore v_1 e deve passare per A:

$$2(x_1 - 1) + 2x_2 + 2(x_3 - 1) = 0$$

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^3$ sia Π il piano passante per i punti A, B e C seguenti: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Procedendo come nell'esercizio 2 otteniamo l'equazione intrinseca del piano:

$$2x_1 - x_2 - x_3 - 4 = 0$$

(i) il punto $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Pi$ se verifica l'equazione. Sostituendo $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0$ si ha:

$2 \cdot 2 - 4 = 0$ è verificata quindi il punto appartiene al piano.

(ii) il vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è perpendicolare a Π ? SI !

(iii) Dato Π' Il piano di equazione $\{x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ determinare una descrizione parametrica della retta $r = \Pi \cap \Pi'$

Occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \end{cases}$$

Risolvendo il sitema otteniamo la seguente equazione parametrica della retta: $\begin{cases} x_1 = (4 + 2t)/3 \\ x_2 = (-4 + t)/3 \\ x_3 = t \end{cases}$