Ingegneria Gestionale - Corso di Analisi II e Algebra

anno accademico 2008/2009

ESERCITAZIONE 3.4

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

• Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
A matrice 3×3, $\Rightarrow \det(3A) = 3 \cdot \det(A)$	☐	•
A matrice 3×3, $\Rightarrow \det(2A) = 8 \cdot \det(A)$	•	☐
A matrice 3×3, $\Rightarrow \det(-A) = -\det(A)$	•	☐
A matrice 2×2, $\Rightarrow \det(-A) = -\det(A)$	☐	•
A, B matrici 3×3, $\Rightarrow rk(A+B) = rk(A) + rk(B)$	☐	•
A matrice 31×31, $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow rk(A^n) = n \cdot rk(A)$	☐	•
A matrice 3×3, B matrice 3×3 $\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$	☐	•
A matrice 5×3, B matrice 3×4 $\Rightarrow A \cdot B$ è una matrice 5×4	•	☐
A matrice 3×2, B matrice 2×3 $\Rightarrow A \cdot B$ è una matrice 3×3	•	☐
A matrice 3×2, B matrice 2×3 $\Rightarrow A \cdot B$ è una matrice 2×2	☐	•
A matrice 3×2, B matrice 2×3 $\Rightarrow B \cdot A$ è una matrice 2×2	•	☐
Esiste una matrice 2×2 A non nulla tale che $A^2 = 0$	•	☐

Esercizio 1. Date le seguenti matrici, determinarne il rango e la dimensione di $Ker(l_A)$, dove l_A è l'applicazione lineare $\quad X \mapsto A \cdot X$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\text{r}k = 2$;	$\dim(Ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	$\text{r}k = 1$;	$\dim(Ker(l_A)) = 1$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\text{r}k = 2$;	$\dim(Ker(l_A)) = 1$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\text{r}k = 1$;	$\dim(Ker(l_A)) = 2$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\text{r}k = 2$;	$\dim(Ker(l_A)) = 1$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\text{r}k = 3$;	$\dim(Ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\text{r}k = 3$;	$\dim(Ker(l_A)) = 1$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 & 8 & 9 & 6 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 12 & 23 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 10 & 43 & 5 & 8 & 16 & 28 \end{pmatrix}$	$\text{r}k = 3$;	$\dim(Ker(l_A)) = 9 - 3 = 6$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\text{r}k = 3$;	$\dim(Ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 99 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 98 \\ 0 & 0 & \cdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\text{r}k = 100$;	$\dim(Ker(l_A)) = 0$

Esercizio 2.1 Siano A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e B la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Risposte. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Esercizio 2.2 Per ciascuna delle seguenti matrici A calcolare la matrice A^2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Siano A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Risposte. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. Siano A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e B la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Risposte. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. Siano A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e B la matrice $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$. Determinare il rango di $A \cdot B$ e il rango di $B \cdot A$.

Risposte. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

In entrambi i casi il rango è $= 1$.

Esercizio 6. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinare una matrice B tale che $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Risposta. Se penso alla matrice A come la matrice associata all'applicazione lineare l_A, le colonne rappresentano le immagini dei vettori della base canonica.

La matrice che dobbiamo ottenere permuta le prime due colonne della matrice A lasciando invariata la terza.

Pertanto la matrice B sarà ottenuta scambiando tra loro i primi due vettori della base canonica.

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 7. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

(i) Determinare , se esiste, un vettore $X \in \mathbb{R}^2$ tale che $A \cdot X$ è il vettore nullo.

Risposta. Si tratta di determinare un vettore del Ker di l_A.
Poichè il determinante della matrice è nullo (ed infatti si ha II riga =-2 I riga) tale vettore esiste .
Per trovarlo è sufficiente risolvere

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0$$

Ovvero basta prendere ad esempio $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ii) Determinare , se esiste, una matrice B non nulla tale che $A \cdot B$ è la matrice nulla .
Risposta. In questo caso basta prendere una matrice costtuita da due vettori colonna appartenenti al Ker.

Ad esempio $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 8. Per ciascuna delle seguenti matrici calcolare la matrice inversa.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/10 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$