Ingegneria Gestionale - Corso di Analisi II e Algebra

anno accademico 2008/2009

ESERCITAZIONE 3.3

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \Rightarrow rk(f) \leq 3$	•	□
$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow rk(f) \leq 3$	•	□
$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ surgettiva.	•	□
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ iniettiva.	•	□
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tale che $rk(f) = 3 \Rightarrow f$ surgettiva .	□	•
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow \ dim(Ker(f)) = 2$	□	•
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow \ dim(Ker(f)) = 1$	•	□
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow \ dim(Ker(f)) = 1$	•	□
$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $rk(f) = 2 \Rightarrow \ dim(Ker(f)) = 2$	•	□

- Sia A una matrice quadrata, $n \times n$, scritta come $A = \Big(v_1, v_2, v_3, ..., v_n\Big), \quad con \quad v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$. Allora

Proposizione	Vera	Falsa
$v_3 = v_1 \Rightarrow \det A = 0$	•	□
$v_3 = -v_1 \Rightarrow \det A = 0$	•	□
$v_3 = 2v_1 + 5v_2 \Rightarrow \det A = 0$	•	□
$\det(A) = \det \Big(v_2, v_1, v_3, ..., v_n\Big)$	□	•
$\det(A) = \det \Big(v_2, v_3, v_1, ..., v_n\Big)$	•	□
$\det(A) = \det \Big(v_1, v_2, v_3, ..., [v_n + 3v_1]\Big)$	•	□
$\det(A) = \ \det \Big(v_1, v_2, v_3, ..., [v_n - 3v_2]\Big)$	•	□

- Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare e sia A la matrice associata ad f rispetto alla base canonica. Allora :

Proposizione	Vera	Falsa
$rk(f) = 3 \Rightarrow \quad \det(A) \neq 0$	•	□
$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \quad rk(f) = 3$	•	□
$rk(f) < 3 \Leftrightarrow \quad \det(A) = 0$	•	□
$\det(A) \neq 0 \Rightarrow \quad Ker(f) = \{0_V\}$	•	□
$\det(A) = 0 \Rightarrow \quad Ker(f) \neq \{0_V\}$	•	□
$\det(A) = 0 \Rightarrow \quad \exists \ \ v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0_V$ t.c. $f(v) = 0_V$	•	□

Esercizio 1. Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$\begin{pmatrix} t & -t & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ t & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $A \cdot X = b$, dove $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Per i valori di t per cui esiste almeno una soluzione del precedente sistema, determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni, specificando in particolare. quando la soluzione e' unica.

Soluzione. (i) Sia A la matrice associata ad f. Si ha $det(A) = -2t^2 + 2t$.
Pertanto il determinante si annulla $\iff$ $t = 0, 1$.
Quindi se $t \neq 0, 1$: rango di $A = \dim(Im(f_t))= 3$, $\dim(Ker(f_t)) = 0$.

Analizziamo i casi particolari.

Se $t = 0$ la matrice A diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. La II e la III colonna sono linearmente indipendenti per cui rango di $A = \dim(Im(f_t))= 2$, e quindi $\dim(Ker(f_t)) = 3 - 2 = 1$.

Se $t = 1$ la matrice A diventa $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. La II e la III colonna sono linearmente indipendenti per cui rango di $A = \dim(Im(f_t))= 2$, e quindi $\dim(Ker(f_t)) = 3 - 2 = 1$.

(ii). Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha soluzione se e soltanto se $rg(A) = rg(A|b)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} t & -t & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ t & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \begin{pmatrix} t & -t & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ t & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso poichè il vettore colonna b coincide con la III colonna della matrice A, allora avremo che $rg(A) = rg(A|b)$ per qualsiasi valore di t, e quindi esiste sempre soluzione del sistema.

(iii). Per quanto visto al punto (i),
se $t \neq 0, 1$: rango di $A = 3 =$ numero di incognite $\Rightarrow$ Esiste un'unica soluzione del sistema
se $t = 0, 1$: rango di $A = \dim(Im(f_t))= 2$ $\Rightarrow$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione = 3-2=1.

Esercizio 2. Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -t & -t & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 2t & t \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $A \cdot X = b$, dove $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $A \cdot X = b$, dove $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Soluzione. (i) A_t è una matrice 4×3, pertanto $rg(A_t) \leq 3$.

Si noti che la seconda e la terza riga (o equivalentemente la seconda e la terza colonna) sono indipendenti per qualsiasi valore di t per cui il rango è sempre almeno 2. Vediamo se esistono valori di t per cui il rango è 3.

Se troviamo un minore 3×3 con determinante $\neq 0$ allora il rango sarà 3.

A tale scopo consideriamo il minore M_t ottenuto eliminando la quarta riga:

$$M_t = \begin{pmatrix} -t & -t & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $\det(M_t) = 0 \ \forall \ t$. Pertanto possiamo dire che la prima riga dipende lineramente dalla seconda e dalla terza per qualsiasi valore di t.

Consideriamo allora il minore ottenuto eliminando la prima riga.

$$M'_t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 2t & t \end{pmatrix}$$

Abbiamo $\det(M'_t) = 0 \ \forall \ t$. Pertanto possiamo dire che anche la quarta riga dipende lineramente dalla seconda e dalla terza per qualsiasi valore di t.

Quindi per qualsiasi valore di t si ha: rango di $A_t = \dim(Im(f_t)) = 2$, $\dim(Ker(f_t)) = 1$.

(ii). Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha soluzione se e soltanto se $rg(A_t) = rg(A_t|b)$, dove

$$A_t = \begin{pmatrix} -t & -t & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 2t & t \end{pmatrix} \qquad (A_t|b) = \begin{pmatrix} -t & -t & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ t & 2t & t & 0 \end{pmatrix}$$

Dal punto (i) sappiamo che $rg(A_t) = 2$ per qualsiasi valore di t.

$(A_t|b)$ è una matrice 4×4. Calcoliamo il suo determinante.

$\det(A_t|b) = 0$. Quindi per qualsiasi valore di t $rg(A_t|b) \leq 3$ (in effetti sapevamno dal punto (i) che le prime tre colonne sono linearmente dipendenti tra loro e quindi tutte e 4 lo sono).

Vediamo se esistono valori di t per cui $rg(A_t|b) = 2$.

Consideriamo il minore N ottenuto eliminando la prima colonna e la prima riga.

$$N_t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2t & t & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $\det(N_t) = 6t$, pertanto se $t \neq 0$ si ha $rg(A_t|b) = 3 > 2 = rg(A_t)$ e quindi il sistema lineare non ammette soluzione.

Vediamo adesso l'ultimo caso $t = 0$. $(A_0|b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Eliminando la IV riga e la II colonna si ottiene il minore $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ il cui determinate è diverso da 0. Quindi anche per $t = 0$ si ha $rg(A_0|b) = 3 > 2 = rg(A_0)$, ovvero anche per $t = 0$ non esiste soluzione del sistema.

(iii) Ripetiamo gli argomenti usati al punto (ii). In questo caso si ha

$$(A_t|b) = \begin{pmatrix} -t & -t & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ t & 2t & t & 3 \end{pmatrix}$$

$det(A_t|b) = 0$. Consideriamo il minore ottenuto eliminando la prima colonna e la prima riga.

$$N_t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2t & t & 3 \end{pmatrix}$$

Si ha $\det(N_t) = 6t - 6$. Quindi se $t \neq 1$ il determinante non si annulla e si ha $rg(A_t|b) = 3 > 2 = rg(A_t)$. Pertanto se $t \neq 1$ il sistema lineare non ammette soluzione.

Per $t = 1$ la matrice $(A_t|b)$ diventa

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si noti che la colonna b è uguale alla somma (I colonna + II colonna). Ovvero per $t = 1$ i due ranghi coincidono e quindi esiste il sistema ammette soluzione.

In questo caso la dimensione dello spazio delle soluzioni è $= 3 - 2 = 1$.

Esercizio 3. Calcolare il determinante, il rango e la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare associata di ciascuna delle seguenti matrici

$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\det(A) = -2$	$\mathrm{r}k(A) = 2$	$\dim(ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$	$\det(A) = -19$	$\mathrm{r}k(A) = 2$	$\dim(ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 1$	$\dim(ker(l_A)) = 1$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 1$	$\dim(ker(l_A)) = 1$
$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 19 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 2$	$\dim(ker(l_A)) = 1$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 12$	$\mathrm{r}k(A) = 3$	$\dim(ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 1$	$\dim(ker(l_A)) = 2$
$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 36$	$\mathrm{r}k(A) = 3$	$\dim(ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 24$	$\mathrm{r}k(A) = 3$	$\dim(ker(l_A)) = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 3$	$\dim(ker(l_A)) = 1$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\det(A) = -2$	$\mathrm{r}k(A) = 4$	$\dim(ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 0$	$\mathrm{r}k(A) = 2$	$\dim(ker(l_A)) = 2$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 40$	$\mathrm{r}k(A) = 4$	$\dim(ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 40$	$\mathrm{r}k(A) = 4$	$\dim(ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 99 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 100 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 100!$	$\mathrm{r}k(A) = 100$	$\dim(ker(l_A)) = 0$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 99 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 98 \\ 0 & 0 & \cdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\det(A) = 1$	$\mathrm{r}k(A) = 100$	$\dim(ker(l_A)) = 0$

Esercizio 4. per ciascuna delle seguenti matrici determinare una base dell'immagine e una base del nucleo dell'applicazione lineare associata $\quad l_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Soluzione.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 19 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso si ha $\mathrm{r}k(A) = 2$ perchè il determinante è nullo e le prime due colonne sono indipendenti.

Pertanto una base di $Im(l_A)$ è : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

Per determinare il Ker di l_A dobbiamo risolvere il sistema $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 19 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

la cui soluzione è data da $x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = -t$, con t parametro reale.

Pertanto una base del $Ker(l_A)$ è : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso si ha $\mathrm{r}k(A) = 2$ perchè il determinante è nullo e le prime due colonne sono indipendenti.

Pertanto una base di $Im(l_A)$ è : $\left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Per detrminare il Ker di l_A dobbiamo risolvere il sistema $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

la cui soluzione è data da $x_1 = t, x_2 = t, x_3 = -t$, con t parametro reale.

Pertanto una base del $Ker(l_A)$ è : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

In questo caso si ha $\mathrm{r}k(A) = 1$ perchè tutte le colonne sono multiple della prima.

Pertanto una base di $Im(l_A)$ è : $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Per detrminare il Ker di l_A dobbiamo risolvere il sistema $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

la cui soluzione è data da $x_1 = t, x_2 = s, x_3 = -1/4t - 1/2s$, con s, t parametri reali.

Pertanto una base del $Ker(l_A)$ è : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

In questo caso si ha $\mathrm{r}k(A) = 3$ perchè il determinante è diverso da 0.

Pertanto una base di $Im(l_A)$ è data dalle colonne della matrice A: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

In questo caso $Ker(l_A) = \{\mathbf{0_V}\}$