Ingegneria Gestionale - Corso di Analisi II e Algebra

anno accademico 2008/2009

ESERCITAZIONE 3.1

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 5x$ è lineare	•	☐
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(x)$ è lineare	☐	•
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1$ è lineare	•	☐
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2$ è lineare	•	☐
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2$ è lineare	☐	•
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^3$ è lineare	☐	•
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sin(\pi/8) \cdot x_1 + x_2$ è lineare	•	☐
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sin(x_1) + \sin(x_2)$ è lineare	☐	•
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2$ è lineare	•	☐
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \pi \cdot x_1 + 2\log_e(7) \cdot x_2$ è lineare	•	☐
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ è lineare	☐	•
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \pi x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ è lineare	•	☐
Esiste f lineare t.c. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐	•
Esiste f lineare t.c. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	•	☐

• Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare .

Sapendo che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e che $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, allora $f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

SOLUZIONE. Poichè $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e f è lineare allora necessariamente:

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare .

Sapendo che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, e che $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, allora $f\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

SOLUZIONE. Poichè $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e f è lineare allora necessariamente:

$$f\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

SOMMA DIRETTA.

Proposizione. Siano W e Z due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.
Supponiamo $\dim(W) = r$ e $\dim(Z) = s$ e siano $\{w_1, \cdots, w_r\}$ una base di W e $\{z_1, \cdots, z_s\}$ una base di Z.
Allora

$$\mathbb{R}^n = W \bigoplus Z \iff \begin{cases} \mathbb{R}^n = W + Z \\ W \cap Z = \{\mathbf{0_V}\} \end{cases} \iff \begin{cases} n = r + s \\ \{w_1, \cdots, w_r, z_1, \cdots, z_s\} \text{ è una base di } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\mathbb{R}^n = W + Z \iff \{w_1, \cdots, w_r, z_1, \cdots, z_s\} \text{ è un sistema di generatori per } \mathbb{R}^n$$

- Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$,

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \ , \text{ allora si ha :}$$

$\mathbb{R}^3 = W + Z$	Vera	
$\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$	Vera	

- Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$,

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ , \text{ allora si ha :}$$

$\mathbb{R}^3 = W + Z$		Falsa
$\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$		Falsa

- Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$,

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ , \text{ allora si ha :}$$

$\mathbb{R}^3 = W + Z$	Vera	
$\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$		Falsa

- Dati W e Z i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \}, \ Z = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle \ , \text{ allora :}$$

$\mathbb{R}^3 = W + Z$		Falsa
$\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$		Falsa

- Dati W e Z i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ , \qquad Z = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle \text{ allora :}$$

$\mathbb{R}^3 = W + Z$		Falsa
$\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$		Falsa

- Dati W e Z i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ , \qquad Z = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \text{ allora :}$$

$\mathbb{R}^3 = W + Z$		Falsa
$\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$		Falsa