Corso di Algebra
Ingegneria Gestionale
anno accademico 2004/2005

SOLUZIONI ESERCITAZIONE 2.3

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
3 vettori costituiscono una base per $V \Rightarrow$ sono linearmente indipendenti	$\otimes$	
3 vettori costituiscono una base per $V \Rightarrow$ sono generatori	$\otimes$	
3 vettori di $\mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti costituiscono una base per $\mathbb{R}^3$	$\otimes$	
3 vettori qualsiasi di $\mathbb{R}^3$ costituiscono una base		$\otimes$
$v_3 = 5v_1 + 4v_2 \quad \Rightarrow \quad \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$	$\otimes$	
v_1 , v_2 sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$ $\dim\langle v_1, v_2 \rangle = 2$	$\otimes$	
v_1 , v_2, v_3 sono linearmente dipendenti $\Rightarrow$ $\dim\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 2$		$\otimes$
$v_1 \neq 0_V$, $v_2 = 3 \cdot v_1$, $v_3 = 5v_1 \Rightarrow \dim\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 1$	$\otimes$	
$W = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle \quad \Rightarrow \quad \dim(W) \leq n$	$\otimes$	
$W = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearmente indipendenti $\quad \Rightarrow \quad \dim(W) \leq n$	$\otimes$	
I vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono una base per $\mathbb{R}^2$	$\otimes$	
I vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono una base per $\mathbb{R}^2$		$\otimes$
I vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono un insieme di generatori per $\mathbb{R}^2$	$\otimes$	
La dimensione dello spazio $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$ è $= \quad 3$		$\otimes$
I vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono un insieme di generatori per $\mathbb{R}^3$		$\otimes$

- Dati $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, determinare la dimensione dello spazio generato da v_1 e v_2.

RISPOSTA : 1

Esercizio 1. Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, $W_1 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; : \; 2x_1 - 3x_2 = 0\}$, determinare una base di W_1 e una sua equazione parametrica.

Soluzione. $\dim(W_1) = 2 - 1 = 1$.

L'equazione diventa

$$2x_1 = 3x_2$$

ponendo $x_2 = t$ parametro, otteniamo $x_1 = \frac{3}{2} \cdot t$ e quindi la seguente descrizine parametrica di W_1:

$$W_1 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ponendo $t = 2$ per comodità otteniamo come base di W_1 l'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 2. Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, determinare una base di W_2 e una sua equazione parametrica.

Soluzione. $\dim(W_2) = 3 - 1 = 2$. Ponendo $x_2 = t$ e $x_3 = s$ otteniamo $x_1 = -x_2 + \frac{1}{2}x_3 = -t + \frac{1}{2}s$.

Si ottiene pertanto la seguente equazione parametrica per W_2:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ponendo $t = 1, s = 0$ e quindi $t = 0, s = 1$ otteniamo la seguente base di W_2: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 3. Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W_3 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; 2x_1 - 3x_2 = 0\}$, determinare una base di W_3 e una sua equazione parametrica.

Soluzione. $\dim(W_3) = 3 - 1 = 2$.

Attenzione : in questo caso x_3 non compare nell'equazione ma rimane comunque una variabile. Petanto possimao porre $x_3 = s$ parametro.

L'equazione, che è la medesima del primo esercizio, può essere risolta ponendo $x_2 = t$ parametro, e quindi $x_1 = \frac{3}{2} \cdot t$.

Si ottiene pertanto la seguente equazione parametrica per W_3:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ponendo $t = 2, s = 0$ e quindi $t = 0, s = 1$ otteniamo la seguente base di W_3: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 4. Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W_4 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

determinare una base di W_4 e una sua equazione parametrica.

Soluzione. Abbiamo due equazioni indipendenti, quindi $\dim(W_4) = 3 - 2 = 1$.

Applichiamo l'algoritmo di Gauss. Sostituiamo $II \leftrightarrow II - I$. Il sistema diventa

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad -3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Poniamo $x_3 = t$ parametro. Si ha $x_2 = \frac{1}{3}t$ e quindi $x_1 = -2x_2 - x_3 = -\frac{2}{3}t - t = -\frac{5}{3}t$.

Si ottiene pertanto la seguente equazione parametrica per W_4:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ponendo $t = 3$ otteniamo la seguente base di W_4: $\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 5. Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, $\quad W_5 = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

determinare una base di W_5.

Soluzione. Abbiamo due equazioni indipendenti, quindi $\dim(W_5) = 4 - 2 = 2$.

Applichiamo l'algoritmo di Gauss. Sostituiamo $II \leftrightarrow II - I$. Il sistema diventa

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \quad -4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Poniamo $x_4 = s$ e $x_3 = t$ parametri. Si ha $x_2 = \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}s$ e quindi $x_1 = -2x_2 - x_3 + x_4 = \ldots = -\frac{3}{2}t$.

Si ottiene pertanto la seguente equazione parametrica per W_5:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ponendo $t = 1, s = 0$ e quindi $t = 0, s = 1$ otteniamo la seguente base di W_2:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio 6. Dato W_6 il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$: $W_6 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

determinare una rappresentazione intrinseca di W_6.

Soluzione. $\dim(W_6) = 1$. $W_6 \subset \mathbb{R}^2$. Quindi per descrivere W_6 è necessaria una equazione lineare (infatti $1 = 2 - 1$!!!).

La nostra equazione sarà della forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

Cerchiamo di determinare i coefficienti date le nostre condizioni. Ovvero dobbiamo imporre il passaggio per $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, cioè sostituire $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Otteniamo allora:

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 3 = 0$$

Ovvero $a_2 = t$, $a_1 = -3t$. Sostituendo $t = 1$ un'equazione di W_6 è la seguente

$$W_6 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad -3x_1 + x_2 = 0\}$$

Esercizio 7. Dato W_7 il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$: $W_7 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$

determinare una rappresentazione intrinseca di W_7.

Soluzione. I due vettori sono lineramente indipendenti, quindi $\dim(W_7) = 2$. $W_7 \subset \mathbb{R}^3$. Quindi per descrivere W_7 è necessaria $1 = 3 - 2$ equazione lineare.

La nostra equazione sarà della forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

Cerchiamo di determinare i coefficienti date le nostre condizioni. Ovvero dobbiamo imporre il passaggio per i due vettori, cioè sostituire

una prima volta

$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2$;

una seconda volta

$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -2$.

Otteniamo allora il seguente sistema

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 0 \\ 3a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo $II \leftrightarrow II - 3 \cdot I$. Si ha

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 0 \\ \quad -8a_2 - 8a_3 = 0 \end{cases}$$

Ovvero, ponendo $a_3 = t$, si ottiene dalla seconda equazione $a_2 = -a_3 = -t$, e dalla prima equazione $a_1 = t$. Sostituendo $t = 1$ un'equazione di W_7 è la seguente

$$W_7 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

Esercizio 8. Dati W_8 e W_9 i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$W_8 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$, $W_9 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 2x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$,

determinare una base di $W_8 \cap W_9$.

Soluzione. $\dim(W_8) = \dim(W_9) = 2$.

Poichè entrambi sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$, la loro intersezione sarà in questo caso una retta oppure i due piani coincidono.

Per determinare $W_8 \cap W_9$ possiamo usare due metodi.

I MODO: Determiniamo una rappresentazione intrinseca di W_8 e quindi facciamo il sistema tra le due equazioni.

W_8 è descritto da $1 = 3 - 2$ equazione lineare della forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

Cerchiamo di determinare i coefficienti date le nostre condizioni. Ovvero dobbiamo imporre il passaggio per i due vettori, cioè sostituire

una prima volta

$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2;$

una seconda volta

$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -2.$

Otteniamo allora il seguente sistema

$$\begin{cases} a_1 \qquad + 2a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo $II \leftrightarrow II - \cdot I$. Si ha

$$\begin{cases} a_1 \qquad + 2a_3 = 0 \\ \qquad a_2 - 4a_3 = 0 \end{cases}$$

Ovvero, ponendo $a_3 = t$, si ottiene dalla seconda equazione $a_2 = 4t$, e dalla prima equazione $a_1 = -2t$. Sostituendo $t = 1$ un'equazione di W_8 è la seguente

$$W_8 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \}$$

L'intersezione si determina risolvendo il sistema $W_8 \cap W_9 = \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss. Sostituiamo $II \leftrightarrow II + I$. Il sistema diventa

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo $x_2 = 0$. Quindi la prima equazione diventa $x_1 - 2x_3 = 0$ Poniamo $x_3 = t$ parametro. Si ha $x_1 = \frac{1}{2}t$.

Si ottiene pertanto la seguente equazione parametrica per $W_8 \cap W_9$:

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

II modo: Sostituiamo l'equazione parametrica di W_8 "dentro" l'equazione cartesiano di W_9 e troviamo le condizioni sui parametri.

$$W_8 = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Sostituiamo nell'equazione di W_9 i seguenti valori di x_1, x_2, x_3:

$x_1 = \lambda_1 + \lambda_2$,
$x_2 = 0 \cdot \lambda_1 + \lambda_2$,
$x_3 = 2\lambda_1 - 2\lambda_2$.
Otteniamo la seguente equazione:

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 2(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_2 - (2\lambda_1 - 2\lambda_2) = 3\lambda_2 = 0$$

Pertanto si ottiene $\lambda_2 = 0$, quindi λ_1 è il parametro libero che descrive l'intersezione.
Comclusione : $W_8 \cap W_9$:

$$\left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad : \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 9. Dati W_{10} e W_{11} i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$W_{10} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle , W_{11} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

determinare una base di $W_{10} \cap W_{11}$.

Soluzione. In questo caso conviene trasformare uno dei due sottospazi in equazione intrinseca e quindi procedere come nell'esercizio precedente.
Si ha $\dim(W_{10}) = \dim(W_{11}) = 2$.
Determiniamo un' equazione intrinseca di W_{10}.
W_{10} è descritto da $1 = 3 - 2$ equazione lineare della forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

Cerchiamo di determinare i coefficienti date le nostre condizioni. Ovvero dobbiamo imporre il passaggio per i due vettori, cioè sostituire
una prima volta
$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$;
una seconda volta
$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$.
Otteniamo allora il seguente sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 \qquad = 0 \end{cases}$$

Poniamo $a_2 = t$. Si ottiene dalla seconda equazione $a_1 = -t$, e dalla prima equazione $a_3 = 0$. Sostituendo $t = 1$ un'equazione di W_{10} è la seguente

$$W_{10} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad -x_1 + x_2 = 0 \}$$

Per determinare l'intersezione applichiamo il secondo metodo.
Sostituiamo l'equazione parametrica di W_{11} "dentro" l'equazione cartesiano di W_{10} e troviamo le condizioni sui parametri.

$$W_{11} = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Sostituiamo nell'equazione di W_{10} i seguenti valori di x_1, x_2, x_3:
$x_1 = \lambda_1$,
$x_2 = \lambda_2$,
$x_3 = 2\lambda_1 + \lambda_2$.

Otteniamo la seguente equazione:

$$-x_1 + x_2 = -\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Pertanto ponendo $\lambda_2 = u$ parametro, si ottiene $\lambda_1 = u$ e quindi

$$W_{10} \cap W_{11} = \left\{ u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 10. Dati W_{12} e W_{13} i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$W_{12} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \}, \quad W_{13} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

determinare $W_{12} \cap W_{13}$.

Soluzione. Abbiamo $W_{13} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$

Sostituiamo nell'equazione di W_{12} i seguenti valori di x_1, x_2, x_3:
$x_1 = s$,
$x_2 = s$,
$x_3 = s$.
Otteniamo la seguente equazione:

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 2s - s - s = 0$$

Tale equazione è verificata per ogni valore di s . Ciò significa che W_{13} è interamente contenuto in W_{12}.
Quindi la conclusione è : $W_{12} \cap W_{13} = W_{12}$