Corso di Algebra

Ingegneria Gestionale

anno accademico 2004/2005

SOLUZIONI ESERCITAZIONE 1.3

• Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
$z = 0 \Rightarrow e^z = 1$	$\otimes$	
$e^z = 1 \Rightarrow z = 0$		$\otimes$
$e^{z_1} = e^{z_2} \Rightarrow z_1 = z_2$		$\otimes$
$z_1 = z_2 + 2\pi \Rightarrow e^{z_1} = e^{z_2}$		$\otimes$
$z_1 = z_2 + 6\pi \Rightarrow e^{z_1} = e^{z_2}$		$\otimes$
$e^{z_1} = e^{z_2} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $z_1 = z_2 + 2k\pi$		$\otimes$
$z = i \Rightarrow z^{122} = -1$	$\otimes$	

$e^{5+i\frac{7\pi}{2}} = -i \cdot e^5$

$e^{\log_e 7+i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{7}{2} + i\frac{7\sqrt{3}}{2}$

$e^{\log_e 6+i\frac{\pi}{4}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} + i\frac{6\sqrt{2}}{2}$

$e^{2+i\frac{\pi}{6}} = \frac{e^2\sqrt{3}}{2} + i\frac{e^2}{2}$

$e^{-1-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{e}$

$e^{-1+i\frac{9\pi}{2}} = \frac{i}{e}$

• Dati $z = 3 + i4$, $w = 2 - i6$ allora $Im(z \cdot w) = 10$

1. $z^3 = -2\overline{z}$

Soluzione. $z = 0$ è soluzione.

Sia $z \neq 0$. Poniamo z nella forma esponenziale : $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$. Poichè $\overline{z} = \varrho \cdot e^{-i\vartheta}$ e $-2 = 2 \cdot e^{i\pi}$ l'equazione diventa

$$\varrho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = 2 \cdot \varrho^2 \cdot e^{i\pi} \cdot e^{-i\vartheta}$$

Uguagliando i moduli e gli argomenti otteniamo

$$\begin{cases} \varrho^3 = 2\varrho \quad , \quad \varrho \in \mathbb{R}^+ \\ 3\vartheta = \pi - \vartheta + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e quindi le seguenti soluzioni distinte diverse da zero (N.B. : $\varrho = 0$ lo abbiaamo già considerato):

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{2} \\ \vartheta = \frac{\pi+2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

Pertanto tutte le soluzioni dell' equazione sono

$$z = 1 + i, \quad -1 + i, \quad -1 - i, \quad 1 - i, \quad 0$$

2. $(\overline{z}-i)^3 = 2z+2i$

Soluzione. Poniamo $w = z+i$. In questo modo otteniamo

$$\overline{z}-i = \overline{w}, \quad 2z+2i = 2w$$

Pertanto l'equazione diventa:

$$\overline{w}^3 = 2 \cdot w$$

$w = 0$ è soluzione. Poniamo w nella forma esponenziale : $w = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$. Poichè $\overline{w} = \varrho \cdot e^{-i\vartheta}$ l'equazione diventa

$$\varrho^3 \cdot e^{-i3\vartheta} = 2 \cdot \varrho \cdot e^{i\vartheta}$$

Uguagliando i moduli e gli argomenti otteniamo

$$\begin{cases} \varrho^3 = 2\varrho \quad , \quad \varrho \in \mathbb{R}^+ \\ -3\vartheta = \vartheta + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e quindi le seguenti soluzioni distinte diverse da zero (N.B. : $\varrho = 0$ lo abbiamo già considerato):

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{2} \\ \vartheta = \frac{-2k\pi}{4}, \quad k = 0,1,2,3 \end{cases}$$

Pertanto tutte le soluzioni dell' equazione sono

$$w = \sqrt{2}, -i\sqrt{2}, \quad -\sqrt{2}, \quad i\sqrt{2}, \quad 0$$

In conclusione, poichè $z = w - i$ le soluzioni della nostra equazione diventano

$$z = \sqrt{2}-i, -i\sqrt{2}-i, \quad -\sqrt{2}-i, \quad i\sqrt{2}-i, \quad -i$$

3. $(z-1)^4 = -4$

Soluzione. Poniamo $w = z-1$. In questo modo l'equazione diventa:

$$w^4 = -4$$

$w = 0$ non è soluzione. Poniamo w nella forma esponenziale : $w = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$. Poichè $-4 = 4 \cdot e^{i\pi}$ l'equazione diventa

$$\varrho^4 \cdot e^{i4\vartheta} = 4 \cdot e^{i\pi}$$

Uguagliando i moduli e gli argomenti otteniamo

$$\begin{cases} \varrho^4 = 4 \quad , \quad \varrho \in \mathbb{R}^+ \\ 4\vartheta = 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e quindi le seguenti soluzioni distinte diverse da zero:

$$\begin{cases} \varrho = \sqrt{2} \\ \vartheta = \frac{2k\pi}{4}, \quad k = 0,1,2,3 \end{cases}$$

Pertanto tutte le soluzioni dell' equazione sono

$$w = 1+i, \quad -1+i, \quad -1-i, \quad 1-i,$$

e quindi, poichè $z = w+1$ le soluzioni della nostra equazione diventano

$$z = 2+i, \quad i, \quad -i, \quad 2-i,$$

4. $e^z = e$

Soluzione. Poichè $e = e^1$ otteniamo
$z = 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

5. $e^z = 2i$

Soluzione. Poichè $2i = e^{\log 2 + i\frac{pi}{2}}$ otteniamo
$z = \log 2 + i(\frac{\pi}{2} 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

6. $e^z = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$

Soluzione. Dato $w = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ si ha $|w| = \sqrt{8+8} = 4$, mentre $arg(w) = \frac{\pi}{4}$.
Ovvero $w = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$. Quindi otteniamo
$z = \log 4 + i(\frac{\pi}{4} 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

7. $e^{\pi z} = 1$

Soluzione. $\pi z = 0 + i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ovvero $z = i2k$, $k \in \mathbb{Z}$

8. $e^{2z} = e^{\overline{z}+1+3\pi i}$

Soluzione. In questo caso abbiamo l'uguaglianza tra due esponenziali. Pertanto l'equazione è verificata se e soltanto se

$$2z = \overline{z} + 1 + 3\pi i + i2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ponendo $z = x + iy$, e quindi $\overline{z} = x - iy$ e uguagliando la parte reale e la parte immaginaria della precedente equazione otteniamo:

$$\begin{cases} 2x = x + 1 \\ 2y = -y + 3\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ovvero: $z = \frac{1}{2} + i(\pi + \frac{2}{3}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$