Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra lineare e Analisi II

anno accademico 2008/2009

ESERCITAZIONE 4.2

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

- Si consideri un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Proposizione	Vera	Falsa
$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \ \forall v, w$	☐	☐
$\langle v, w\rangle \geq 0 \ \forall v, w$	☐	☐
$\langle v, v\rangle \geq 0 \ \forall v$	☐	☐
$\langle 2v_1 + 3v_2, w\rangle = 2\langle v_1, w\rangle + 3\langle v_2, w\rangle$	☐	☐
Se $\langle v, v\rangle = 4$ allora $\langle 2v, 2v\rangle = 8$	☐	☐
Se $\langle v, v\rangle = 4$ allora $\langle 2v, 2v\rangle = 16$	☐	☐

- Dato il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$

  (i) determinare la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica.
  (ii) Dimostrare che il prodotto scalare è definito positivo.

- Dato il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$

  (i) determinare la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica.
  (ii) Determinare un vettore v tale che $\langle v, v\rangle = 0$

- Dato il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 - 2x_2y_2$

  (i) determinare la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica.
  (ii) Determinare un vettore v tale che $\langle v, v\rangle = 0$

- Dato il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$

  (i) determinare la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica.
  (ii) Determinare un vettore v tale che $\langle v, v\rangle = 0$

- Per ciascuna delle seguenti matrici A_i si consideri il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle_i : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle_i = (y_1 \ \ y_2 \ \ y_3) \cdot A_i \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Determinare in quali casi il prodotto scalare è nondegenere, definito positivo, definito negativo.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1. Data la forma $\mathrm{f}_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathrm{f}_t\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = (y_1 \;\; y_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori del parametro t f_t è un prodotto scalare

Esercizio 2.

Data la forma $\mathrm{f}_{t,s} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathrm{f}_{t,s}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = (y_1 \;\; y_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare per quali valori dei parametri t, s $\mathrm{f}_{t,s}$ è un prodotto scalare.
(ii) Determinare per quali valori dei parametri t, s $\mathrm{f}_{t,s}$ è un prodotto scalare definito positivo.

Esercizio 3. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ sia $\mathrm{f}_\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma

$$\mathrm{f}_\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1y_1 + \alpha \cdot x_1y_2 + \alpha^2 \cdot x_2y_1 + x_2y_2$$

Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui
(i) f_α è un prodotto scalare
(ii) f_α è un prodotto scalare non degenere.

Esercizio 4. Al variare del parametro reale t si consideri il prodotto scalare $\langle \, , \, \rangle_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la cui matrice rispetto alla base canonica è la seguente:

$$A_t = \begin{pmatrix} 8 & t & 2 \\ t & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare i valori di t per cui il prodotto scalare è non degenere.

(ii) Determinare i valori di t per cui il prodotto scalare è definito positivo.

Esercizio 5. Al variare del parametro reale t si consideri il prodotto scalare $\langle \, , \, \rangle_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la cui matrice rispetto alla base canonica è la seguente:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1+2t & t & -2 \\ t & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare i valori di t per cui il prodotto scalare è non degenere.

(ii) Dimostrare che per ogni t esiste almeno un vettore isotropo (non nullo).

Esercizio 6. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado ≤ 2 e sia $\langle \, , \, \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ l' applicazione definita da

$$\langle p_1(x), p_2(x) \rangle \; = \; \int_0^1 p_1(x) \cdot p_2(x) \; dx$$

(i) Dimostrare che $\langle \, , \, \rangle$ è un prodotto scalare.
(ii) Rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ determinare la matrice assaciata a $< \, , \, >$.
(iii) Dimostare che $\langle \, , \, \rangle$ è un prodotto scalare definito positivo.