Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra lineare e Analisi II

anno accademico 2008/2009

ESERCITAZIONE 4.1

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
A, B matrici 3×3, $\Rightarrow \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$	☐	☐
A, B matrici 3×3, $\Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$	☐	☐
A, B matrici 3×3, $\Rightarrow rk(A+B) = rk(A) + rk(B)$	☐	☐
v è autovettore per $f \Rightarrow 2v$ è autovettore per f	☐	☐
v_1, v_2 sono autovettori per $f \Rightarrow v_1 + v_2$ è autovettore per f	☐	☐
v_1, v_2 sono autovettori per f relativi allo stesso autovalore $\lambda_0 \Rightarrow v_1 + v_2$ è autovettore per f	☐	☐
A matrice $3 \times 3 \Rightarrow \exists$ almeno un autovettore per l_A	☐	☐
A matrice $2 \times 2 \Rightarrow \exists$ almeno un autovettore per l_A	☐	☐
A matrice 2×2, $\det(A) = 0 \Rightarrow \exists$ almeno un autovettore per l_A	☐	☐
$f : V \to V$, $Ker(f) \neq \{O_V\} \Longrightarrow 0$ è autovalore per f	☐	☐
$f : V \to V$, $Ker(f) \neq \{O_V\} \Longrightarrow \exists$ almeno un autovettore per f	☐	☐

- Data $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, il vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore 4 se : $f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) =$

  il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all'autovalore 5 se

- Il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ è autovettore per l' applicazione lineare l_A associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ t & 4 \end{pmatrix}$

  se $t = \boxed{}$

- Nelle seguenti matrici l'autovalore 3 compare sempre con molteplicità algebrica 4. Determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 3 in ciascuno dei 4 esempi :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Determinare gli autovalori con la relativa molteplicità algebrica e geometrica in ciascuno dei 4 esempi :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1. Determinare per quali valori del parametro t il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ è autovettore per l' applicazione lineare l_A associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ t & -6 & -4 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di f.
(iii) Esiste una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per f ?

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -9 & -3 \end{pmatrix}$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di f.

Esercizio 4. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) Dimostrare che A è diagonalizzabile
(ii) Dimostrare che A^2 è diagonalizzabile
(iii) Dimostare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n$ è diagonalizzabile

Esercizio 5. Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è triangolarizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

Esercizio 6. Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Determinare per quali valori del parametro β la seguente matrice A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & \beta \end{pmatrix}$$

Esercizio 8. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Determinare gli autovalori di A^5.