16 - 1 - 2003

141

(1) $\begin{cases} e^{2z} + 5e^{4\bar{z}} = 0 \\ \left| z + \frac{1}{2}\log 5 \right| < 3 \end{cases}$

$\boxed{\text{I ep:}}$ $e^{2z} = -5e^{4\bar{z}} = e^{\pi i} \cdot e^{\log 5} \cdot e^{4\bar{z}}$

$= e^{\pi i + \log 5 + 4\bar{z}}$

Poiché $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$

SOLUZIONE I^a ep: $2z = \pi i + \log 5 + 4\bar{z}$

$2z - 4\bar{z} = \log 5 + i\pi + 2k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$

Posto $z = x + iy$ (quindi $\bar{z} = x - iy$)

otteniamo $2x + i2y - 4x + i4y = \log 5 + i\pi + 2k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$

CIOE' $\begin{cases} -2x = \log 5 \\ 6y = \pi + 2k\pi \end{cases}$

CONCLUSIONE: $z = -\frac{1}{2}\log 5 + i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) \quad , k \in \mathbb{Z}$

Imponiamo la condizione data dalla 2ª disequ.

$$\left| z + \frac{1}{2}\log 5 \right| = \left| -\frac{1}{2}\log 5 + i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\log 5 \right| =$$

$$= \left| i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) \right| = \left| \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \right|$$

Quindi dobbiamo determinare i valori di $k \in \mathbb{Z}$ per cui

$$\left| \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \right| < 3$$

$$-3 < \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} < 3$$

$$\left(-3 - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{3}{\pi} < k < \left(3 - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{3}{\pi} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

CIOE': $-3 \leq k \leq 2 \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

SOLUZIONE SISTEMA : $z = -\frac{1}{2}\log 5 + i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)$

$k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$

16-1-2003

(2) $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & t \\ t & 0 & -1 \\ t & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

i) Calcoliamo $rk(A_t)$.

$$\det(A_t) = -(-2)\cdot \det\begin{pmatrix} t & -1 \\ t & -4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \dots = 3\cdot(t-1)^2$$

Quindi se $t \neq 1 \Rightarrow \det(A_t) \neq 0$

$$\Rightarrow rk(A_t) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\mathrm{Im}(f_t)) = 3 \\ \dim(\mathrm{Ker}(f_t)) = 3-3 = 0 \end{cases}$$

CASO $t = 1$:

$$A_{t=1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & t \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad \det = 0 \Rightarrow rk \leq 2$$

Il minore $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0 \Rightarrow rk \geq 2$

cioe' $rk(A_{t=1}) = 2$

Se $t=1$ $\begin{cases} \dim(\mathrm{Im}(f_t)) = 2 \\ \dim(\mathrm{Ker}(f_t)) = 3-2=1 \end{cases}$

ii)

$$f_t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \iff A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = b$$

sistema 3 eq. in 3 incognite

Se $t \neq 1$ $\quad rk(A_t) = 3$ (già visto)

In questo caso $3 = rk(A_t) \leq rk\left(A_t \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{matrix}\right) \leq 3$

perché matrice 3×4

Allora $rk\left(A_t \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{matrix}\right) = 3$

OVVERO $\exists$ unica soluzione

(OPPURE: si può citare il TEO. DI CRAMER)

<u>Caso $t=1$:</u> $\quad rk(A_t) = 2$ (già visto)

$$(A_{t=1} \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right).$$

Se consideriamo il minore $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

si ha $\det(M) \neq 0$

Quindi $rk(A_{t=1} \vdots b) = 3 \neq 2 = rk(A_{t=1})$

CIOE' per $t = 1$ non $\exists$ soluz.

---

iii) Per quali t $\quad Ker(f_t) \subseteq Im(f_t)$

Per $t \neq 1$ si ha $\dim(Ker(f_t)) = 0$

OVVERO per $t \neq 1$ $\quad Ker(f_t) = \{0_V\} \subset \mathbb{R}^3$

Poichè $Im(f_t)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, e tutti i sottosp. vett. contengono il vettore 0_V, ALLORA per $t \neq 1$ necessariamente
$Ker(f_t) \subseteq Im(f_t)$.

<u>CASO $t = 1$</u>: Calcoliamo una base di $Ker(f_{t=1})$ e vediamo se è contenuta in $Im(f_t)$, OVVERO se è esprimibile mediante i vettori di una base di $Im(f_t)$.

Base $\mathrm{Im}(f_{t=1}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ Prime 2 colonne di A

Base $\mathrm{Ker}(f_{t=1})$: $\quad 2K = 2 \quad$ consideriamo solo le prime 2 righe

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = t$ per.

$x_1 = x_3 = t$ $\qquad \mathrm{Ker} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

$2x_2 = x_1 + x_2 \rightarrow x_2 = t$

BASE $\mathrm{Ker}(f_{t=1}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, base di $\mathrm{Ker}(f_{t=1})$ è esprimibile mediante i vettori della base di $\mathrm{Im}(f_{t=1})$ [INFATTI è uguale al I° vettore!]

QUINDI, anche per $t = 1$ si ha

$$\mathrm{Ker}(f_t) \subseteq \mathrm{Im}(f_t).$$

16 · 1 · 2003

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Autovalori: calcolo il polinomio caratteristico

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_d) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

sviluppo rispetto II riga:

$$= (3-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \cdot \left(-1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right)$$

$$= \ldots = (3-\lambda) \cdot \left(\lambda^2 \cdot (3-\lambda) \right)$$

CIOE' $P_A(\lambda) = (3-\lambda)^2 \cdot \lambda^2$

autovalori: 0 m.a. $= 2$

3 m.a. $= 2$

In particolare tutti gli autovalori sono reali

$\Rightarrow A$ e' triangolarizzabile

ii) Per determinare la molteplicità geometrica determiniamo $rk(A)$, $rk(A-3Id)$

$\underline{\lambda = 0:}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$ è autovalore $\Rightarrow \det(A) = 0$

Il minore $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ha $\det \neq 0 \Rightarrow rk(A) = 3$

$\Rightarrow \dim Ker(A) = 4-3 = 1 = m.g.(0)$

$\lambda = 3:$

$$A - 3 \cdot Id = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

II riga $= (0\,0\,0\,0) \Rightarrow rk(A-3Id) = rk \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

II colonna $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = rk = rk \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow rk = 2$

cioè $rk(A - 3Id) = 2$

$\Rightarrow \dim(Ker(A-3Id)) = 4-2 = m.g.(3)$

CONCLUSIONE:

$\lambda = 0$ m.a. = 2 m.g. = 1

$\lambda = 3$ m.a. = 2 m.g. = 2

Poiché per $\lambda = 0$ $m.a.(0) = 2 \neq 1 = m.g.(0)$

la matrice non è diagonalizzabile.

---

ii) Autovettori relativi a $\lambda = 0$.

Abbiamo visto che $rk(A) = 3$ ($\Rightarrow \dim\{\text{autovettori relativi a } \lambda = 0\} = 1$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

III riga = I riga (possiamo eliminarla

Il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

II eq. $\Rightarrow$ $x_2 = 0$

IV eq. $\Rightarrow$ Poniamo $x_4 = t$ parametro

$x_1 = -x_4 = -t$

I eq. $\Rightarrow$ $x_3 = -x_1 - 2x_4 = -t$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{AUTOVETTORI} \\ \text{relativi a } \lambda=0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{c} t\in\mathbb{R} \\ t\neq 0 \end{array} \right\}$$

150

Autovettori relativi a $\lambda=3$

(Sappiamo che $\dim \operatorname{Ker}(A-3\,Id)=2$)

$$(A-3\,Id)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Eliminiamo II riga e operiamo sulle righe con il metodo di Gauss:

Scambiamo $I \Leftrightarrow IV$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$II \Leftrightarrow II - I$

$III \Leftrightarrow III + 2\,I$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Il sistema è equivalente a
$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = t$ par. $\qquad x_2 = s$ SECONDO PARAMETRO

$x_3 = 2t$

$x_1 = +2t$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda=3$: $\left\{ t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} s,t\in\mathbb{R} \\ s\neq 0 \\ t\neq 0 \end{array} \right\}$

1151

Esame di Geometria e Algebra per Ingegneria (Corso di Laurea)

prova scritta del 5-2-2003

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^3 = \overline{z}^3 \cdot |z| \\ z^4 - z \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare $\dim(Ker\ f)$ e $\dim(Ker\ f^2)$.
(ii) Determinare, se esistono, le soluzioni del sistema

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Determinare, se esiste, un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $\begin{cases} w \in Im\ f \\ w \notin Im\ f^2 \end{cases}$

Esercizio 3. Al variare del parametro reale β sia A_β la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta & 1 & 0 \\ 0 & 3\beta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(i) Si determini il polinomio caratteristico di A_β e gli autovalori, specificandone la molteplicità algebrica.
(ii) Si determini per quali valori di β la matrice A_β è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

1. $\begin{cases} z^3 = \bar{z}^3 \cdot |z| \\ z^4 - z \neq 0 \end{cases}$

I eq: $z=0$ soluz.

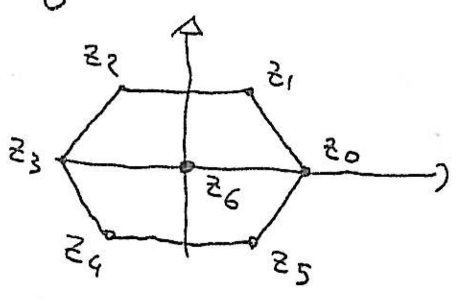
Sia $z \neq 0$, $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} z^3 = \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} \\ \bar{z}^3 = \rho^3 \cdot e^{-i3\vartheta} \\ |z| = \rho \end{array}$

CIOE': I eq. $\Leftrightarrow$ $\rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = \rho^3 \cdot e^{-i3\vartheta} \cdot \rho$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = \rho^4 & \rho \in \mathbb{R},\ \rho > 0 \\ 3\vartheta = -3\vartheta + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3(1-\rho) = 0 & \rho \in \mathbb{R},\ \rho > 0 \\ 6\vartheta = 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

SOLUZIONI distinte: $\begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{6} & k = 0, 1, \dots, 5 \end{cases}$

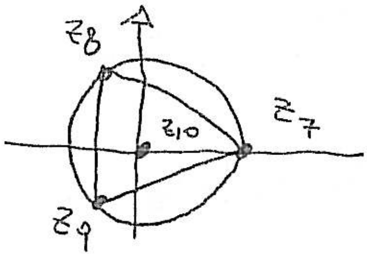


II eq: (conviene studiare l'equaz.
$z^4 - z = 0$ & poi "togliere" le soluzioni comuni alla I eq.)

$z^4 - z = 0$ $\underline{z = 0}$ sol.

$z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ $\Rightarrow$ $z^4 = z$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \rho^4 = \rho \\ 4\vartheta = \vartheta + 2k\pi \end{cases}$

SOLUZIONI distinte : $\begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$ $k = 0, 1, 2$



OVVERO: $z_7 = 1$

$z_8 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_9 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_{10} = 0$

Tutte e 4 le soluzioni sono soluz. della I^a eq. $\begin{cases} z_7 = z_0 \\ z_8 = z_2 \\ z_9 = z_4 \\ z_{10} = z_6 \end{cases}$

Conclusione : $\underline{\text{soluzioni sistema}}$

$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_3 = -1$

$z_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

5 · 2 · 2003

154

(2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

i) dim Ker f & dim Ker f^2.

$f \Leftrightarrow A$:

$$\det(A) = 0 \Rightarrow rk(A) \leq 2$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow rk(A) \geq 2$$

OVVERO $\quad rk(A) = rk(f) = 2$

dim Ker $f = 3 - rk(f) = 3 - 2 = 1$

---

f^2 : Se associamo ad f la matrice A allora a $f^2 \overset{def.}{=} f \circ f$ si associa la matrice $A^2 = A \cdot A$

Calcolo di A^2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

coeff. di posto 1,1 = $2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 = 2$

" $\quad$ 1,2 = $2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 0$

⋮

coeff. di posto 3,3 = $4 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) = 2$

Cioè: $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -8 & 0 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

II colonna $= 0_V$; III colonna $= -$ I colonna

I colonna $\neq 0_V \Rightarrow rk(A^2) = 1 = rk(f^2)$

Cioè $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 3 - rk(f^2) = 3 - 1 = 2$

ii). Determinare tutte le soluzioni del sistema

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SISTEMA $\Leftrightarrow A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b$

$$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

oss. $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot$ III colonna $\Rightarrow rk(A \vdots b) = rk(A)$

$\Rightarrow$ Quindi $\exists$ soluzione del sistema

&

$\dim\{\text{soluzioni}\} = 3 - rk(A) = 1$

Per risolvere il sistema applichiamo il metodo di Gauss.

$$(A;b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$\text{II} \leftrightarrow \text{II} + \text{I}$

$\text{III} \leftrightarrow \text{III} - 2\,\text{I}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$\text{III} = \text{II} \Rightarrow \text{III}$ inutile

(n.b.: poiché $rk(A) = rk(A;b) = 2$ potevamo considerare le prime 2 eq. e basta essendo il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ invertibile)

CIOE' sistema $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$x_3 = t$ parametro

$x_2 = -2t - 1$

$x_1 = -\frac{x_2}{2} = t + \frac{1}{2}$

SOLUZIONE sistema: $\left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ base del Ker

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ SOLUZIONE particolare

$w \in \mathbb{R}^3$ t.c. $\begin{cases} w \in \operatorname{Im} f \\ w \notin \operatorname{Im} f^2 \end{cases}$

dim $(\operatorname{Im} f) = 2$ & colonne II e III di A sono lin. ind.

$\Rightarrow$ base $\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

dim $(\operatorname{Im} f^2 = 1)$ $\Rightarrow$ base $\operatorname{Im} f^2$ = I colonna A^2
I° colonna $\neq 0$,

$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

CIOE' $w \in \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow w = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

Per determinare w è sufficiente considerare un vettore della forma $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$
che non è multiplo di $\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

<u>Per esempio</u>: $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

5 . 2 . 2003

158

Es. 3

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 1 & 0 \\ 0 & 3\beta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det\left(A_\beta - \lambda\, Id\right) = \dots$$

$$= (\beta - \lambda) \cdot (3\beta - \lambda) \cdot \lambda^2$$

autovalori:

$\lambda_1 = \beta$

$\lambda_2 = 3\beta$

$\lambda_3 = 0$

N.B. Bisogna distinguere i casi in cui 2 dei 3 autovalori sono uguali tra loro.

CIOE':

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\lambda_1 \neq \lambda_3$; $\lambda_2 \neq \lambda_3$

b) $\lambda_1 = \lambda_2$ $\quad \lambda_3 \neq \lambda_1$

c) $\lambda_1 = \lambda_3$ $\quad \lambda_2 \neq \lambda_1$

d) $\lambda_2 = \lambda_3$ $\quad \lambda_2 \neq \lambda_1$

e) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

NOSTRO CASO:

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 \iff 3\beta = 0 \iff \beta = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \iff \beta = 3\beta \iff \beta = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \iff \beta = 0 \end{cases}$$

CIOE' :

Se $\beta = 0$ $\quad$ $\lambda = 0$ unico autovalore di molt. alg. $= 4$

Se $\beta \neq 0$

$$\lambda_1 = \beta \qquad m.a. = 1$$
$$\lambda_2 = 3\beta \qquad m.a. = 1$$
$$\lambda_3 = 0 \qquad m.a. = 2$$

i) Essendo $\beta \in \mathbb{R}$ la matrice è sempre triangolarizzabile.

Per vedere la diagonalizzabilità distinguiamo i 2 casi.

$\boxed{\beta = 0}$

$$A_{\beta=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rk(A) = 1 \Rightarrow \dim Ker(A) = 4-1 = 3$$

cioè $m.g.(0) = 3 < m.a.(0) = 4$

Quindi per $\beta = 0$ A non è diag.

$\boxed{\beta \neq 0}$ $\quad 1 \leq m.g. \leq m.a. \Rightarrow$ per λ_1 e λ_2 si ha $m.g. = m.a.$

Per $\lambda_3 = 0$: $A - 0\,Id = A = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 1 & 0 \\ 0 & 3\beta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

Il minore $\begin{pmatrix} 3\beta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

ha $\det = -3\beta^2 \neq 0 \Rightarrow$ per $\beta \neq 0$ $\dim Ker(A - 0\,Id) = m.g.(0) = 4-3$

Quindi anche per $\beta \neq 0$ $m.g.(0) = 1 < m.a.(0) = 2 \Rightarrow$ non è diag.

160

Esame di Geometria e Algebra per Ingegneria |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Corso di Laurea)

prova scritta del 13-6-2003

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Cognome) |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| (Nome) |_|_|_|_|_|_| (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^6 + 8 = 0 \\ z^4 + 4z^2 + 4 \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determini il polinomio caratteristico di f e gli autovalori, specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Determinare gli autovettori di f.

(iii) Determinare, se esiste, un vettore $w \in \mathbb{R}^4$ tale che $\begin{cases} w \in Im\ f \\ w \notin Ker\ f \end{cases}$

Esercizio 3. Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ t & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema

$$f_t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(iii) Posto $t = 1$, determinare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = W \bigoplus Im(f)$