19 · 2 · 2002

101

tracce soluzioni

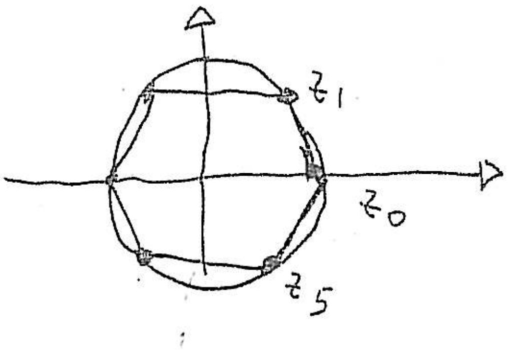
1) $\begin{cases} z^6 - 1 = 0 \\ z^6 + 2z^3 + 1 = 0 \end{cases}$

I eq. $z = 0$ non è sol.

$z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

$z^6 = 1 \iff \begin{cases} \rho^6 = 1 \\ 6\vartheta = 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

SOLUZIONI: $\begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = \frac{k\pi}{3} \end{cases} \quad k = 0, 1, \ldots, 5$



II eq. $z^3 = t \quad \rightarrow \quad t^2 + 2t + 1 = 0$

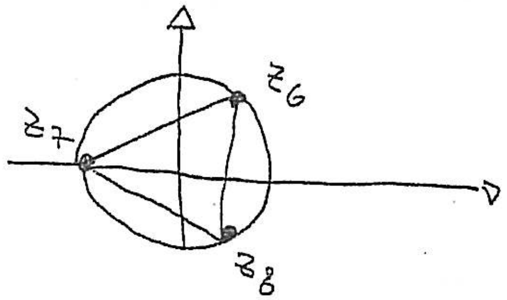
$(t+1)^2 = 0$

$t = -1$ soluzione

cioè: $\underline{z^3 = -1}$ $\quad z = \rho \cdot e^{i\vartheta} \rightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\vartheta = \pi + 2k\pi \end{cases}$

SOLUZIONE: $\begin{cases} r = 1 \\ \vartheta = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$ $k = 0, 1, 2$

$\boxed{102}$



SOLUZIONI DEL SISTEMA: $\begin{cases} z_6 = z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_7 = z_3 = -1 \\ z_8 = z_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

19.2.2002

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

i) $\det(A) = 0 \Rightarrow rk(A) \leq 2$

Il minore $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0 \Rightarrow rk(A) \geq$

quindi $rk(f) = 2$

$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$; $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 2 = 1$

$f^2 = f \circ f \Rightarrow$ matrice associata a f^2: $A^2 = A \cdot$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

II col. = I col.

III col. = $-3 \cdot$ I col. $\Rightarrow rk(A^2) = 1$

$\Rightarrow rk(f) = 1$

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{104}$

Im f è generato dai primi 2 vettori colonne

$\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

[Poiché $rk(A) = 2$ consideriamo le prime 2 righe solamente]

Sistema $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ \text{II} + \text{I} \quad 0 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = t \quad \text{parametro} \\ x_2 = 2x_3 = 2t \\ x_1 = -2x_2 + 5x_3 = -4t + 5t = t \end{cases}$$

Base $\operatorname{Ker} f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono lin. ind.

$\iff \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

iii) $f^2 \leftrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

105

$rk(A^2) = 1 \Rightarrow$ Per determinare $\operatorname{Ker}(f^2)$ è sufficiente una sola equazione

$\operatorname{Ker} f \leftrightarrow \{ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \}$

$$\begin{cases} x_3 = t & \text{parametro} \\ x_2 = s & \text{parametro} \\ x_1 = -x_2 + 3x_3 = -s + 3t \end{cases} \longleftrightarrow \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Base $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

12.02.2012

3) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ 106

) $P_{car} = \det(A - \lambda\, Id) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$

$= (2-\lambda)\cdot(\lambda^2-1) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$

autovalori: $1, -1, 2$

<u>autovettori:</u>

$\lambda = 1$: $\quad Ker(A - Id) \Leftrightarrow \begin{cases} -\cancel{x_1} + 2x_2 + \cancel{x_3} = 0 \\ 0 + \cancel{x_2} + 0 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

$\lambda = 1$ autovettori: $\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \neq 0 \right\}$

$\lambda = -1$ $\quad Ker(A + Id) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 0 + 3x_2 + 0 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

$\lambda = -1$ autovettori: $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \neq 0 \right\}$

$\lambda=2$: $\quad Ker(A-2I_d) \leftrightarrow \begin{cases} -2x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2-2x_3=0 \end{cases}$

(ho dovuto prendere I & III riga!)

$I \leftrightarrow I+2\cdot II$ $\quad \begin{cases} 0-2x_2-3x_3=0 \\ x_1-2x_2-2x_3=0 \end{cases}$

$x_3=t$ par.

$x_2=-\frac{3}{2}\cdot t$

$x_1=2x_2+2x_3=-3t+2t=-t$

autovettori: $\left\{ t\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t\neq 0 \right\}$

ii) A ha 3 autovalori distinti
(⇒ m.a. = 1 ∀ autovalore ; m.g. ≥ 1 sempre ⇒ m.a. = m.g. = 1)
quindi A è diagonalizzabile
(in particolare è triangolarizzabile)

iii) $v_t=\begin{pmatrix} t \\ 9t^2-\frac{1}{2} \\ |t| \end{pmatrix}$ è autovettore per f

$\Updownarrow$

v_t è autovettore di autovalore $1, -1, 2$

V_t è autovettore di autovalore 1
$\Updownarrow$

$\exists$ s tale che $V_t = s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} t = s \\ 9t^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ |t| = s \end{cases} \longrightarrow t = \pm \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$t = s$
$|t| = s$ $\Rightarrow$ $t > 0$ $\Rightarrow$ sol. $s = +\frac{\sqrt{2}}{6}$, $t = +\frac{\sqrt{2}}{6}$

V_t è autovettore relativo a -1
$\Updownarrow$

$\exists$ s t.c. $V_t = s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} t = s \\ 9t^2 - \frac{1}{2} = 0 \\ |t| = -s \end{cases} \longrightarrow t = \pm \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$t = s$
$|t| = -s$ $\Rightarrow$ $t < 0$ $\Rightarrow$ $s = -\frac{\sqrt{2}}{6}$, $t = -\frac{\sqrt{2}}{6}$

V_t è autovettore relativo a $\cancel{}$ 2
$\Updownarrow$

$\exists$ s t.c. $V_t = s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} t = -s \\ 9t^2 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}s \\ |t| = s \end{cases} \iff \begin{cases} t = -s \\ 9t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \\ t < 0 \end{cases}$$

$$t_{1,2} = \frac{+\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 18}}{18} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{9}{2}}{18}$$

consideriamo la sol. negativa. $t_2 = -\frac{1}{12}$

N.B. Ai fini della risoluzione dell'esercizio è sufficiente trovare un solo t, quindi è suff. risolvere un solo sistema.

110

TEST di Geometria e Algebra – Ingegneria | | | | | | | | | | | | | | | | (Corso di Laurea)

6 giugno 2002 – tempo a disposizione : 30 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : risposta mancante = -4 ; errata = da -3 a +3 ; esatta = +4

• Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare. 2 è autovalore per f se

$\exists\, v \in V$ $v \neq 0$ tale che $f(v) = 2 \cdot v$

Esercizio 2. PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 ; risposta sbagliata = -1

• Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
$e^{-2\pi i} = 1$	☒	☐
$\forall z \neq 0 \ \ z \cdot \bar{z} \geq 0$	☒	☐
Un sistema lineare omogeneo di 3 equaz. in 3 incognite ha almeno una soluzione	☒	☐
W, Z sottospazi di $\mathbb{R}^3$, $\dim W = \dim Z = 2 \Rightarrow W \cap Z \neq \{0\}$	☒	☐
A matrice 3×3 a coeff. reali $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile	☐	☒
A matrice $3 \times 3 \Rightarrow \det 2A = 2 \det A$	☐	☒

Esercizio 3. PUNTEGGIO : risposta mancante o errata = 0 ; risposta esatta = +2

• $z = 6 + 5i, w = 3 - 4i \Rightarrow z \cdot w = \boxed{(6\cdot 3 + 5 \cdot 4) + i \cdot}$ $(3 \cdot 5 - 6 \cdot 4) = 38 + i \cdot (-9)$

• $\dim \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \boxed{3}$

• $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$ ha dimensione = $\boxed{1}$

• $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

• Il prodotto scalare $\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definito da $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 - 4x_2y_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1$

è : definito ☐ indefinito e non degenere ☒ degenere ☐

4 . 6 . 2002

113

1) $\begin{cases} z^4 = -4\pi^4 \\ e^z + e^\pi = 0 \end{cases}$

$z=0$ non è sol.

sia $z \neq 0$: $\boxed{\text{I eq.}}$ $z = \rho \cdot e^{i\vartheta} \Rightarrow z^4 = \rho^4 \cdot e^{i4\vartheta}$

$$z^4 = -4\pi^4 \iff \rho^4 \cdot e^{i4\vartheta} = \underbrace{4\cdot\pi^4}_{\text{modulo}} \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \rho^4 = 4\cdot\pi^4 \\ 4\vartheta = \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

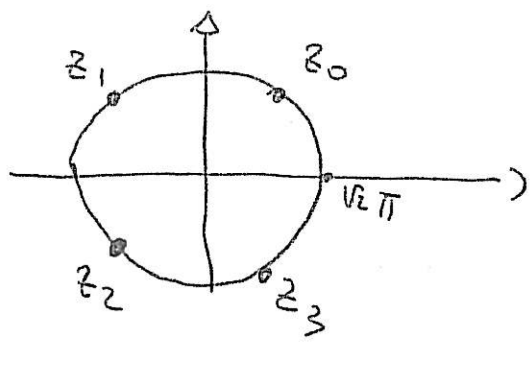
SOLUZIONI distinte : $\begin{cases} \rho = \sqrt{2}\cdot\pi \\ \vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot k \qquad k = 0,1,2,3 \end{cases}$

$z_0 = \pi + i\pi$

$z_1 = -\pi + i\pi$

$z_2 = -\pi - i\pi$

$z_3 = \pi - i\pi$

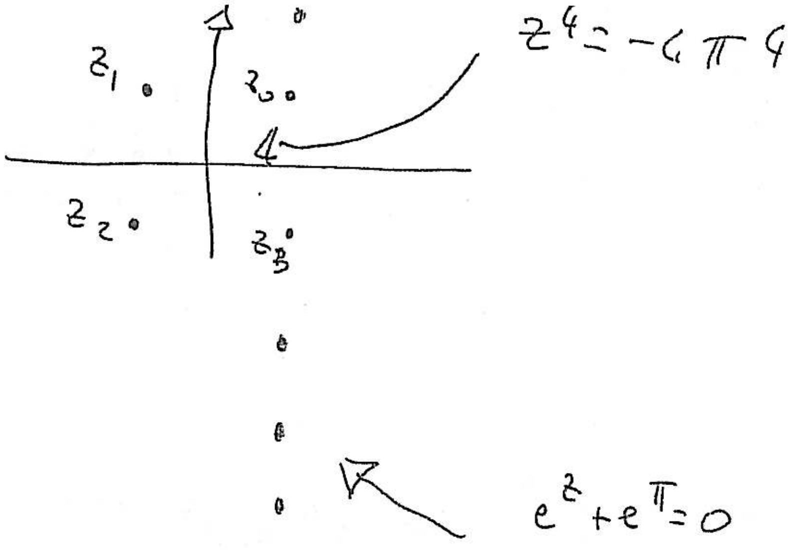


$\boxed{\text{II eq:}}$ $e^z = -e^\pi = e^{\pi + i\pi}$

$\Updownarrow$

$z = \pi + i\pi + 2k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$

114



SOLUZIONI del SISTEMA: z_0 e z_3

$$\boxed{\pi + i\pi \quad \& \quad \pi - i\pi}$$

115

2) $A_\beta = \begin{pmatrix} 2 & -4 & \beta \\ 1 & -2 & 3 \\ \beta & \beta & \underline{1} \end{pmatrix}$

$\det(A_\beta) = \beta \cdot (-12 + 2\beta) - \beta(6 - \beta) + 1 \cdot 0$

sviluppo 2. III riga

$= \beta(3\beta - 18)$

$\det(A_\beta) = 0 \iff \beta = 0, 6$

QUINDI:

Se $\beta \neq 0, 6 \Rightarrow \det A_\beta \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rk}(A_\beta) = 3$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(f_\beta) = 0$ & $\dim \mathrm{Im}(f_\beta) = 3$

Studiamo il caso $\beta = 0$

$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A_0) = 0 \Rightarrow \mathrm{rk}(A_0) \leq 2$

Il minore $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha det $\neq 0 \Rightarrow \mathrm{rk}(A_0) \geq 2$

CIOE': $\mathrm{rk}(A_0) = 2$

Quindi $\dim(\mathrm{Ker}\, f_\beta) = 1$ + $\dim \mathrm{Im}((f_\beta)) = 2$

per $\beta = 0$

Studiamo il caso $\beta = 6$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$\to$ det $\neq 0$

Come nel caso precedente, $\exists$ minore 2×2 con det $\neq 0$

$\Rightarrow \quad rk = 2$

CIOE': per $\beta = 6$ dim Ker $= 1$, dim Im $= 2$

ii) Se $\beta \neq 0, 6$ Ker $(f_\beta) = \{ 0_V \}$

Poiché $\{0_V\} \subseteq$ in ogni sottospazio di V

Se $\beta \neq 0, 6$ allora $\text{Ker}(f_\beta) \subset \text{Im}(f_\beta)$

<u>caso $\beta = 0$</u>: $\text{Im}(f_0) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\text{Ker}(f_0): \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = t \text{ parametro} \\ x_1 = 2x_2 = 2t \end{cases} \Rightarrow \text{Ker}(f_0) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

In questo caso il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, base del Ker, appartiene a $\text{Im}(f_0)$, quindi

$$\text{Ker}(f_0) \subset \text{Im}(f_0)$$

Caso $\boxed{\beta = 6}$: $\quad Im(f_6) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

117

$Ker(f_6)$: $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\leftarrow$ $I = 2 \cdot II$ riga quindi inutile

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad II - 6 \cdot I$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 18x_2 - 17x_3 = 0 \end{cases}$

$x_3 = t$ parametro

$x_2 = \frac{17}{18} \cdot t$

$x_1 = 2x_2 - 3x_3 = \frac{17}{9} \cdot t - 3t = \frac{10}{9} t$

Per $t = 18$: $\quad$ Base $Ker(f_6) = \left\{ \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix} \right\}$

I vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix}$

sono lin. IND.

Quindi $Ker f_6$ & $Im f_6$ sono in somma diretta

OVVERO $Ker f_6 \cap Im f_6 = \{ 0_V \}$

CONCLUSIONE : Per $\beta = 6$ $Ker f_6 \not\subseteq Im f_6$

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

118

i) $P_{car} = \det(A - \lambda Id) =$

$$= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot\left(\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$\dots = (3-\lambda)^2(1-\lambda)^2$$

autovalori:

3 m.a. = 2

1 m.a. = 2

Autovettori:

$\lambda_1 = 3$

$$(A - 3\,Id) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3\,Id)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = 0$

$x_3 = t$ par.

$x_1 = -x_3 = -t$

$x_2 = s$ parametro

N.B. $rK(A - 3\,Id) = 2$
poiché II col = 0
III col = I col.
I e IV sono IND.

Autovettori relativi all'autovalore 3:

$$V_3 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s,t \neq 0 \right\}$$

$\lambda_2 = 1$

$$(A - Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - Id) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = 0$

$x_4 = t$ parametro

$x_3 = s$ parametro

$x_1 = x_3 + x_4 = s + t$

N.B. $rk(A - Id) = 2$

Poiché IV riga $= 0$

III riga $= -$I riga

Autovettori relativi all'autovalore 1:

$$V_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s,t \neq 0 \right\}$$

---

ii) A è triangolarizzabile poiché le radici di PCAR sono $1, 3 \in \mathbb{R}$.

Autovalore $\lambda_1 = 3$ m.a. $= 2$

m.g. $= \dim(\mathrm{Ker}(A - 3Id)) = 4 - rk(A - 3Id) = 2$

poiché $(A - 3Id) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ← II col $= 0$, III col $=$ I col. I e III sono i.util cioè per $\lambda_1 = 3$ $\quad m.a. = m.g. = 2$

$\lambda_2 = 1$: $\quad m.a. = 2$

$$m.g. = 4 - rk(A - Id) = 2$$

poichè $\quad (A - Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

IV riga = 0
III riga = −I riga
I riga e II riga sono ind.

cioè $\quad m.g. = m.a. = 2$

Quindi, poichè $\forall$ autovalore si ha $m.g. = m.a.$ la matrice è diagonalizzabile.

---

iii) $\quad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

abbiamo posto
$s = 0$ $\quad s = 1$
$t = 1$ $\quad t = 0$

$\dim V_1 = 2$

Per determinare W tale che $V_1 \oplus W = \mathbb{R}^4$ è sufficiente determinare uno spazio di $\dim = 2$ t.c. $W \cap V_1 = \{0_V\}$

Per esempio $\quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\det \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}}_{V_1} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{W} \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ i vettori sono ind.}$$

$\Rightarrow$ I due spazi sono in somma diretta