153

Esame di Algebra per Ingegneria gestionale
Esame di Geometria e Algebra per Ingegneria Informatica

prova scritta del 6-2-2001

Esercizio 1. Si risolva nel campo complesso l'equazione

$$e^{3z} + 3e^{2z} + 2e^{z} = 0$$

Esercizio 2. Al variare del parametro reale β sia $f_\beta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta+2 \\ \beta & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \beta+2 & 0 \\ 1 & \beta & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione di $ker(f_\beta)$ e $Im(f_\beta)$

(ii) Posto $\beta = -2$ determinare gli autovalori di f_β e la dimensione degli autospazi relativi.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - z - w \\ y - 2z \\ x - 3z - w \end{pmatrix}$$

(i) Si determini una base di $Ker(f)$.

(ii) Si determinino, se esistono, le soluzioni del sistema $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Si determini un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus Im(f)$.

154

Esame di Algebra
Ingegneria Gestionale
6-2-2001 : TEST
tempo a disposizione : 30 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : risposta mancante o completamente errata = -4 ; risposta esatta = +4 ;

- Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare. Allora

π è autovalore per f se :

$\exists\, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \pi \cdot v$ oppure $\det(A - \pi\, Id) = 0$ dove A è la matrice associata ad f

Esercizio 2. PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 ; risposta sbagliata = -1

- Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
$i^{201} = i$	☒	☐
$z = x + iy \Rightarrow \lvert e^z \rvert = e^x$	☒	☐
$z^2 = \bar{z} \Rightarrow z = 0$	☐	☒
Esiste $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare e iniettiva	☐	☒
A matrice $3 \times 3 \Rightarrow \det(2A) = 2 \cdot \det(A)$	☐	☒
A matrice 3×3; $\det(A) = 0 \Rightarrow \text{rg}\,(A) = 2$	☐	☒

Esercizio 3. PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +2 ; risposta sbagliata = -1

- $\dim \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = \boxed{3}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$ ha rango = $\boxed{3}$

- Il seguente prodotto scalare $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = -x_1 y_2 - x_2 y_1$$

è :

definito ☐ indefinito e non degenere ☒ degenere ☐

Esame di ALGEBRA per Ing. GESTIONALE

Prova scritta del 6.2.2001

55

(1) $$e^{3z} + 3e^{2z} + 2e^{z} = 0$$

Poniamo $w = e^{z}$

l'eq. diventa $$w^3 + 3w^2 + 2w = 0$$
$$\| \quad w(w^2+3w+2)$$

Radici: $\begin{cases} w=0 \\ w=-1 \\ w=-2 \end{cases}$

Quindi a) $e^{z} = 0$ impossibile

b) $e^{z} = -1 \iff e^{z} = e^{i\pi}$

$\iff z = i\pi + i(2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $e^{z} = -2 \iff e^{z} = 2\cdot e^{i\pi}$

$\iff z = \log_e 2 + i(\pi + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

SOLUZIONI: $z = i(\pi + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

56

(2)

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta+2 \\ \beta & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \beta+2 & 0 \\ 1 & \beta & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Calcoliamo $\det(A_\beta)$:

$$\det(A_\beta) = (\text{sviluppo III colonna}) = (\beta+2)\cdot\left(\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta+2 \\ \beta & 4 & 2 \\ 1 & \beta & -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (\beta+2)^2 \cdot \left(\det\begin{pmatrix} \beta & 4 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\right) = (\beta+2)^3 \cdot (\beta-2)$$

CIOE' $\det(A_\beta) \neq 0 \iff \beta \neq 2, -2$

Quindi per $\beta \neq 2, -2$ $\quad rg(A_\beta) = 4$

CIOE' $\dim Im(f_\beta) = 4 \quad \dim Ker(f_\beta) = 0$

Studiamo i casi $\beta = 2$, $\beta = -2$

$\boxed{\beta = 2}$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che II colonna = 2 · I

Quindi per determinare il rango è sufficiente considerare
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che il minore $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(ottenuto cancellando IV riga)

ha $\det \neq 0$ quindi $rk(A_2) \geq 3$

CIOE' $rk(A_2) = 3$

Quindi $\dim \operatorname{Im} f_2 = 3$, $\dim \operatorname{Ker} f_2 = 1 = 4-$

$\boxed{\beta = -2}$

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

III colonna = 0

II colonna = $-2 \cdot$ I colonna

IV colonna = $-$I colonna

$\Rightarrow rk(A_{-2}) = 1$

CIOE' $\dim \operatorname{Im} f_{-2} = 1$ $\dim \operatorname{Ker} f_{-2} = 3$

ii) $\boxed{\beta = -2}$: $A_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{52}$

[n.b. Dal punto i) sappiamo che $\dim \operatorname{Ker} f_{-2} = 3$
quindi 0 sarà autovalore con molt. geometrica $= 3$
(quindi molt. alg. ≥ 3)].

P_{CAR}: $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= \lambda^2 \cdot \left[\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right] = \lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 3\lambda) = \lambda^3 (\lambda - 3)$

autovalori $\lambda = 0$ molt. alg. $= 3$
$\lambda = 3$ molt. alg. $= 1$

Abbiamo visto $\dim \operatorname{Ker} f_{-2} = 3 \Rightarrow$
dim Autospazio relativo a $\lambda = 0$ = molt. geom.
$= 3$

$1 \leq$ molt. geom $\leq$ molt. alg. $\forall$ autovalore
Quindi molt. alg. $(3) = 1 \Rightarrow$ molt. geom. $(3) = 1$

cioè:

$\boxed{5}$

③ $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - z - w \\ y - 2z \\ x - 3z - w \end{pmatrix}$

Matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

i)

Determiniamo $rk(f)$

Osserviamo che $\underline{IV}$ colonna $= -$ I colonna.

Quindi per determinare $rk(f)$ è sufficiente considerare le colonne I, $\underline{II}$, $\underline{III}$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (\Rightarrow rk \leq 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow rk \geq 2$$

cioè $rk(A) = 2$. Quindi $rk(f) = 2 = \dim(\operatorname{Im} f)$.

$$\dim \operatorname{Ker} f = \underline{\underline{4}} - 2 = 2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

operiamo sulle righe

$III \leftrightarrow III - I$ $\qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$III \leftrightarrow III - II$ $\qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x - y - z - w = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

Poniamo $z = t$ parametro

$y = 2z = 2t$

$x = y + z + w$

Poniamo $w = s$ parametro

$x = 3t + s$

cioè $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$

Base $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix} \right.$

(9

$\boxed{G1}$

ii) Dobbiamo risolvere $A \cdot X = b$

Dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$rk(A) = 2$ (già visto)

$rk(A \vdots b) = ?$

$$(A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

IV colonna $= -\mathrm{I}$ $\Rightarrow$ suff. considerare $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

·) Tutti e 3 i minori $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ hanno $\det = 0$

<u>OPPURE</u> ·) $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{I} + \mathrm{II}$

Quindi $rk(A : b) = 2$

(Cioè $\exists$ sol. & $\dim \{\text{soluzioni}\} = 4 - 2$)

Risolviamo il sistema con l'algoritmo di Gauss.

(Oss. Era sufficiente svolgere solo questa parte per risolvere l'esercizio)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

62

$\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{III} - \mathrm{I}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{III} \leftrightarrow \mathrm{III} - \mathrm{I}$: Il sist. è equivalente a

$$\begin{cases} x - y - z - w = 0 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

$z = t$

$w = s$

$y = 2t + 1$

$x = 3t + s + 1$

$$\text{Soluzioni} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

---

iii) sappiamo che $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$.

I colonna e II colonna di A sono lin ind.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quindi $\mathrm{Base}(\mathrm{Im}\, f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

sufficiente trovare vettore v lin. ind. da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Per esempio $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \end{pmatrix}$ ...

63

Esame di Algebra

Ingegneria gestionale

prova scritta del 17-1-2001

Esercizio 1. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} z^6 + 64 = 0 \\ z^3 \neq 4\bar{z} \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -3x - 3z \\ -y + 2z \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$.

(ii) Determinare gli autovalori e gli autovettori di f.

(iii) Dire se $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \bigoplus Im(f)$.

(iv) [Facoltativo] Dire se f è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

Esercizio 3. Al variare del parametro reale t si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + t x_2 + 2x_3 = t + 1 \\ t x_1 + t x_3 = t \\ t x_1 + -t x_2 + x_3 = t \end{cases}$$

Determinare, se esistono, i valori di t per cui

(i) il sistema ha un'unica soluzione.

(ii) Le soluzioni costituiscono uno spazio affine di dimensione 1.

(iii) Le soluzioni costituiscono uno spazio affine di dimensione 2.

(iv) il sistema non ha soluzione.

Esame di Algebra
Ingegneria Gestionale
20-2-2001 : TEST
tempo a disposizione : 30 minuti

64

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : risposta mancante o completamente errata = -4 ; risposta esatta = +4 ;

• Il sistema lineare di m equazioni in n incognite, espresso in forma matriciale come $AX = b$ ammette soluzione se e solo se

rg (A) = rg (A : b)

Esercizio 2. PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 ; risposta sbagliata = -1

• Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
$i^{-2} = i^2$	☒	☐
$e^z = e^2 \Rightarrow z = 2$	☐	☒
3 vettori qualsiasi di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti	☐	☒
Esiste $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare e iniettiva	☒	☐
A matrice $4 \times 4 \Rightarrow \det(2A) = 4 \cdot \det(A)$	☐	☒
A matrice 3×3; rg $(A) = 2 \Rightarrow \det(A) = 0$	☒	☐

Esercizio 3. PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +2 ; risposta sbagliata = -1

• $\dim \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \boxed{2}$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

• Il nucleo della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$ ha dimensione = $\boxed{1}$

• Il seguente prodotto scalare $\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = -x_1 y_1 - 2x_2 y_2$$

è :

definito ☒ indefinito e non degenere ☐ degenere ☐

65

Esame di Algebra per Ingegneria gestionale
Esame di Geometria e Algebra per Ingegneria Informatica
prova scritta del 6-6-2001

Esercizio 1. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} e^{iz+i} = i \\ |z| \leq 2\pi \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare del parametro reale β sia $f_\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \beta & -1 & \beta \\ -\beta & 3 & 0 \\ 0 & 2 & \beta \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione di $ker(f_\beta)$ e $Im(f_\beta)$
(ii) Posto $\beta = 1$ determinare gli autovalori di f_β e dire se la matrice corrispondente è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.
(iii) Posto $\beta = 2$ determinare gli autovalori di f_β e dire se la matrice corrispondente è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

Esercizio 3. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali $W, Z \subset \mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\} \qquad Z = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

i) Determinare una base di $Z + W$ e una base di $Z \cap W$.

ii) Dati i vettori $z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Z$, $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$

determinare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$, tale che

$$\begin{cases} \langle v , z_1 \rangle = 0 \\ \langle v , w_1 \rangle = 0 \end{cases}$$

(dove $\langle \ , \ \rangle$ indica il prodotto scalare euclideo).

iii) Dire se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$, tale che

$$\begin{cases} \langle v , z \rangle = 0 \quad \forall z \in Z \\ \langle v , w \rangle = 0 \quad \forall w \in W \end{cases}$$

66

Esame di Algebra
Ingegneria Gestionale
6-6-2001 : TEST
tempo a disposizione : 30 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : risposta mancante o completamente errata = -4 ; risposta esatta = +4 ;

• Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ e siano $v_1, \ldots, v_n$ vettori di V.
ALLORA $v_1, \ldots, v_n$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se

$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0_V \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$
$\lambda_i \in \mathbb{R} \ \forall i$

Esercizio 2. PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 ; risposta sbagliata = -1

• Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
$i + i^{-1} = 0$	☒	☐
$z^5 = i \Rightarrow \lvert z\rvert = 1$	☒	☐
Esiste $z \in \mathbb{C}$ t.c. $e^z = 0$	☐	☒
Esiste $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineare tale che $\dim(Ker(f)) = 1$	☐	☒
A matrice 3×3 invertibile $\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$	☒	☐
$A,\ B$ matrici $3 \times 3 \Rightarrow \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$	☐	☒

Esercizio 3. PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +2 ; risposta sbagliata = -1

• $\dim \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \boxed{3}$

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 99 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ldots & 98 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 97 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{1}$

• Il seguente prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$
è :

Esame di Algebra

prova del 6.6.2001

(1)
$$\begin{cases} e^{iz+i} = i \\ |z| \leq 2\pi \end{cases}$$

oss. 1. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

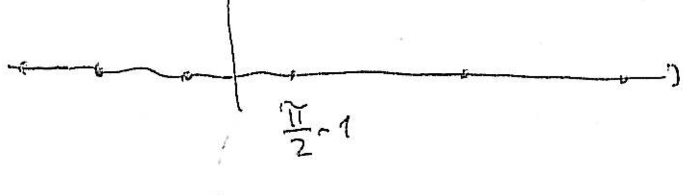
oss. 2 $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + i\,(2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$

Quindi

I: $e^{iz+i} = i \iff e^{iz+i} = e^{i\frac{\pi}{2}} \iff$

$$i\,(z+1) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sol: $z = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$



Dato $z = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Imponiamo la II condizione $|z| \leq 2\pi$ per determinare i valori di k accettati

$$|z| = \left|\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right| \leq 2\pi$$

$$-2\pi + 1 - \frac{\pi}{2} \leq 2k\pi \leq 2\pi + 1 - \frac{\pi}{2}$$

Quindi $\quad k = 0, -1$

SOLUZIONE: $\quad z = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi \qquad k = 0, -1$

---

(2)

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \beta & -1 & \beta \\ -\beta & 3 & 0 \\ 0 & 2 & \beta \end{pmatrix}$$

i) $\det(A_\beta) = 0 \quad \forall \beta$

Quindi $\quad rg(A_\beta) \leq 2 \quad \forall \beta$

OSS. $\quad \det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \beta \end{pmatrix} = 3\beta$

Quindi se $\beta \neq 0 \quad rg(A_\beta) = 2$

$\dim\left(\mathrm{Im}(f_\beta)\right) = 2 \quad , \dim\left(\mathrm{Ker}(f_\beta)\right) = 1$

Studiamo il caso $\beta = 0$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

I colonna $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

III colonna $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $\beta = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

69

$$P_{car} = \det(A - \lambda I_d) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left((3-\lambda)(1-\lambda)\right) + 1 \cdot \left(-(1-\lambda) - 2\right)$$

$$= (1-\lambda)^2 (3-\lambda) + \lambda - 3$$

$$= 3\lambda^2 - 6\lambda + 3 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + \lambda - 3 =$$

$$= -\lambda \cdot (\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

Radici : 0 m.a. = 1
2 m.a. = 1
3 m.a. = 1

Quindi 3 radici reali
($\Rightarrow$ autovalori = 0, 2, 3)

Allora A_1 è triangolarizzabile.

---

3 radici distinte $\Rightarrow$ sfruttiamo

Quindi per $\beta=1$ A è diag.

70

iii) $\beta = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$p_{car} = \dots$

In questo caso il polinomio caratteristico ha una radice 0 con m.a.=1

&

2 radici complesse coniugate

($\Rightarrow$ autovalore $= 0$!)

Quindi

poiché le radici non sono tutte reali

A_2 non è triang.

A_2 non triang. $\Rightarrow$ A_2 non diag.

(3) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ 71 (5)

$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$

)
W e Z sono 2 sottospazi di $\mathbb{R}^3$
di $\dim = 3-1 = 2$ (2 piani!)

Allora $\exists$ 2 possibilità : $W = Z$; $W \cap Z$ = retta

Vediamo $W \cap Z$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \quad (\mathrm{I} + \mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{II})$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = t$ parametro

$x_2 = -x_1 = -t$

$x_3 = 2x_1 + x_2 = 2t - t = t$

$$W \cap Z = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle$$

$\dim W \cap Z = 1 \Rightarrow \dim(W+Z) = \dim W + \dim Z - \dim(W \cap Z)$ **7**

$= 2+2-1 = 3$

cioè $\begin{cases} W+Z \text{ ha } \dim = 3 \\ W+Z \subseteq \mathbb{R}^3 \end{cases} \Rightarrow W+Z = \mathbb{R}^3$

Una base di $\mathbb{R}^3$ è una qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$

per esempio $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

ii) ~~~~ Siano $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \langle v, z_1 \rangle = 0 \\ \langle v, w_1 \rangle = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $u = ($

$\langle v, u \rangle =$
$x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + x_3$

N.B.

$\begin{cases} x_3 = t \text{ parametro} \\ x_2 = -x_3 = -t \\ 3x_1 = x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

sol. : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

Un vettore può essere per $t = 1$: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) <u>I° modo</u>

$\langle v, z \rangle = 0 \quad \forall z \in Z \quad \Longleftrightarrow \quad v = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$

Poiché gli unici vettori perpendicolari ~~⊥~~ al piano Z sono multipli del vettore "dei coefficienti" $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W \quad \Longleftrightarrow \quad v = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad s \in \mathbb{R}$

le

$v = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \& \quad v = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

poiché i 2 vettori non sono multipli uno dell'altro

è possibile solo per $t = s = 0$.

Quindi non $\exists$ v, $v \neq 0$ t.c.

$$\begin{cases} \langle v, z \rangle = 0 & \forall z \in Z \\ \langle v, w \rangle = 0 & \forall w \in W \end{cases}$$

74

II° modo.

Fissiamo base di Z: $\left\{ \underset{\overset{\shortparallel}{z_1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{\overset{\shortparallel}{z_2}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

base di W: $\left\{ \underset{\overset{\shortparallel}{w_1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \right\}$

∘) $\langle v, z \rangle = 0 \quad \forall z \in Z \iff$ per la bilinearità del pr. scalare

$$\begin{cases} \langle v, z_1 \rangle = 0 \\ \& \\ \langle v, z_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

∘) $\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W \iff \begin{cases} \langle v, w_1 \rangle = 0 \\ \langle v, w_2 \rangle = 0 \end{cases}$

Quindi:

$$\begin{cases} \langle v, z \rangle = 0 \quad \forall z \in Z \\ \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W \end{cases} \iff \begin{cases} \langle v, z_1 \rangle = 0 \\ \langle v, z_2 \rangle = 0 \\ \langle v, w_1 \rangle = 0 \\ \langle v, w_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \quad - x_3 = 0 \end{cases}$$

unica sol. $\quad x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0$

75

Esame di Algebra per Ingegneria Gestionale
Esame di Geometria e Algebra per Ingegneria Informatica

prova scritta del 26-6-2001

Esercizio 1. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} \overline{z}^3 - 4z = 0 \\ z - \overline{z} \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare una base di $ker(f)$ e una di $Im(f)$.

(ii) [Ingegneria Gestionale] Determinare gli autovalori di f, la dimensione degli autospazi e dire se la matrice corrispondente è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

(ii) [Ingegneria Informatica] Determinare la forma canonica di Jordan di f.

Esercizio 3. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx + 2ty + 3z \\ tx + tz \\ 2x + y + 3z \end{pmatrix}$$

(i) Si determini per quali valori di t f_t è iniettiva.

(ii) Si determini per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema

$$f_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Si determini per quali valori di t esiste un'unica soluzione del sistema

$$f_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

76

Esame di Algebra
Ingegneria Gestionale
26-6-2001 : TEST
tempo a disposizione : 30 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : risposta mancante o completamente errata = -4 ; risposta esatta = +4 ;

• Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$. Il polinomio caratteristico di A è:

$\det(A - \lambda I_d)$; polinomio di grado n nella variabile λ

Esercizio 2. PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 ; risposta sbagliata = -1

• Dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
$(2i)^5 = -32$	☐	☒
$z \cdot \overline{z} = \|z\|$	☐	☒
$z = \overline{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$	☒	☐
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare; f iniettiva $\Rightarrow f$ surgettiva	☒	☐
A matrice $2 \times 2 \Rightarrow \det(2A) = 4(\det(A))$	☒	☐
$\mathbb{R}^3 = W \oplus Z \Rightarrow \dim(W) < 2$	☐	☒

Esercizio 3. PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +2 ; risposta sbagliata = -1

• $\dim \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle = \boxed{2}$

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

• Sia W il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$: $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

W ha dimensione $= \boxed{2}$

• Il seguente prodotto scalare $\langle\, , \,\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 4x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$

è :

definito ☐ indefinito e non degenere ☐ degenere ☒