Geometria 30·5·2000

(1) $\begin{cases} e^{3z+2} + e^{z+1} = 0 \\ |z-4i| \geq |z| \end{cases}$

I eq.: $e^{3z+2} = -e^{z+1} = e^{z+1+\pi \cdot i}$

I eq. $\Longleftrightarrow$ $3z+2 = z+1+\pi i + (2k\pi)\cdot i$

con $k \in \mathbb{Z}$

$\Updownarrow$

$z = -\frac{1}{2} + i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}$

II: $|x + i(y-4)| \geq |x+iy|$

$\Updownarrow$

$x^2 + (y-4)^2 \geq x^2 + y^2$

$-8y + 16 \geq 0$

$y \leq 2$

Soluzione sistema: $z = -\frac{1}{2} + i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

$k \in \mathbb{Z}, \quad k \leq 0$

2) Matrice associata ad f rispetto base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i)

$\left.\begin{array}{l} \text{II colonna} = \text{I colonna} \\ \text{IV colonna} = -\text{I colonna} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad rk(A) \leq 2$

Però il minore $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è invertibile

Quindi $rk(A) \geq 2$

CIOE' $rk(A) = 2$

dim Im $f = rk(A) = 2$

dim Ker $f = 4 - 2 = 2$

ii) Base immagine:

E' sufficiente considerare le colonne III, IV dalle quali abbiamo estratto il minore $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Base Im: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

(3) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y - z = 0 \right\}$

i) $\dim V = 2$ poichè $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono lin ind.

[prendere, ad esempio, il minore $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$]

$\dim W = 2$ poichè, ad esempio,

$W = \mathrm{Ker}(g)$ dove $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto y - z$

$rk(g) = 1 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(g) = 3 - 1 = 2$

ii) $V, W \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow V + W \subseteq \mathbb{R}^3$

Abbiamo: $\underset{\dim = 2}{V} \subseteq V + W \subseteq \underset{\dim = 3}{\mathbb{R}^3}$

$V + W$ è sottospazio vett. di $\mathbb{R}^3$.

Se $V + W = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim(V + W) = 3$

se $V + W = W \Rightarrow V = W$ & quindi $\dim(V + W) = 2$

Base Ker(f):

Dobbiamo risolvere $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

rk $A = 2$ $\Rightarrow$ suff. considerare il sistema determinato dalle righe $\underline{III}$, $\underline{IV}$

$$\begin{cases} -6z = 0 \\ x + y - w = 0 \end{cases}$$

Una base Ker(f): $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

iii) $P_{car.}(A) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

[Sviluppo rispetto $\underline{III}$ colonna:]

$$= +\lambda^2(\lambda+6)\cdot(\lambda-2)$$

AUTOVALORI:

0	m.a. = 2
-6	m.a. = 1
2	m.a. = 1

Quindi, se $V \neq W$ allora $V+W = \mathbb{R}^3$

Sufficiente verificare che

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} \notin W \; !$$

<u>Quindi</u> $V \neq W$

CIOE' $V+W = \mathbb{R}^3$

dim $V+W = 3$

$$\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V+W) =$$
$$= 2+2-3 = 1 \; !$$

ii) $V+W = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ Base di $V+W$

è una qualsiasi base di $\mathbb{R}^3$

per esempio $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \; !$

Alternativamente:

i) Per determinare $V \cap W$:

$$V = \left\{ \alpha \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} \right\}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} \in W$$

$$\Updownarrow$$

$$(\alpha - 2\beta) - (-3\alpha + 4\beta) = 0$$

$$+4\alpha - 6\beta = 0$$

$$\alpha = \frac{3}{2}\beta$$

cioè $V \cap W = \left\{ \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\alpha\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} \ \middle|\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}12\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

dim $V \cap W = 1$

Esame di Geometria e Algebra
Ingegneria gestionale / Ingegneria Informatica
prova scritta del 20-6-2000

Esercizio 1. Si risolva nel campo complesso l'equazione

$$z^6 - z^3 - \bar{z} \cdot z^3 + \bar{z} = 0$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - w \\ y - z + w \\ x + y - z \\ x - w \end{pmatrix}$$

(i) Determinare $\dim(ker(f))$ e $\dim(Im(f))$.
(ii) Determinare una base per $ker(f)$ e $Im(f)$.
(iii) Dire se $\mathbb{R}^4 = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Esercizio 3.[Ing. Gestionale] Sia f l'applicazione lineare dell'esercizio 2.
i) Determinare gli autovalori e gli autovettori dell'applicazione f

ii) Dire se esiste almeno una soluzione dell'equazione $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Prova scritta del 20/6/2000 **18**

1) $z^6 - z^3 - \bar{z} z^3 + \bar{z} = 0$

$$\overset{\shortparallel}{}$$

$$(z^3 - \bar{z}) \cdot (z^3 - 1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$z^3 - z = 0$ oppure $z^3 - \cancel{z} 1 = 0$

$\boxed{z^3 - 1 = 0}$ $z = 0$ non è sol.

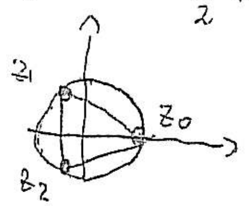
$z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

$z^3 = \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 & \rho \in \mathbb{R} \quad \rho > 0 \\ 3\vartheta = 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

sol. distinte: $\begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$ $k = 0, 1, 2$

$z_0 = 1$; $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\boxed{z^3 = \bar{z}}$

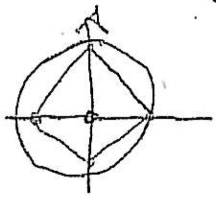
$z = 0$ è soluzione

sia $z \neq 0$ $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

$z^3 = \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = \rho \cdot e^{-i\vartheta} = \bar{z}$

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho & \rho \in \mathbb{R} ; \rho > 0 \\ 3\vartheta = -\vartheta + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

sol. distinte $\begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{4} \end{cases}$ $k = 0, 1, 2, 3$ 19



$z_4 = i$ $z_5 = -1$ $z_6 = -i$ $z_7 = 1$ $z_8 = 0$

CONCLUSIONE : $z^6 - z^3 - \bar{z} \cdot z^3 + \bar{z} = 0$

$\Updownarrow$

$z = 1$; $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; i, -1, $-i$, 0

Prova scritta del 20/6/2000

2) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-w \\ y-z+w \\ x+y-z \\ x-w \end{pmatrix}$

Matrice associata ad f rispetto alla base canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Per determinare il rango di A operiamo sulle righe

$IV - I$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$III - I$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$III - II$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) \leq 2$

il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha det $\neq 0$ $\Rightarrow rg(A) \geq 2$

CIOE' $rg(A) = 2$

1) $\dim Im(f) = rg(A) = 2$

i) Base $\mathrm{Im}(f)$.

21.

Poiché $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$

è sufficiente considerare 2 vettori colonna di A linearmente indipendenti.

Per esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ sono lin. ind.

CIOE' Base $\mathrm{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Base $\mathrm{Ker}(f)$.

Dobbiamo risolvere $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x - w = 0 \\ y - z + w = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - w = 0 \end{cases}$$

forma matriciale: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Operiamo sulle righe applicando il metodo di Gauss.

Come al punto i) otteniamo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

cioè il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x - w = 0 \\ y - z + w = 0 \end{cases}$$

20/6/2000

3) i) $P_{car}(A) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$(1-\lambda)\cdot\left(\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) - (-1)\cdot\left(\det \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$= \dots = \lambda^4$

Autovalori : $\lambda = 0$

Autovettori sono solamente quelli relativi a $\lambda=0$

CIOÈ: $\{\text{Autovettori}\} = \operatorname{Ker} f$

in questo caso

$= \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$

ii) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ x + y - z = 0 \\ x - w = 1 \end{cases}$

Applichiamo teorema di Rouché-Capelli

$(A \vdots b) = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ = − IV colonna

CIOÈ $rg(A \vdots b) = rg(A) = 2$

$$\begin{cases} w = t & \text{parametro} \\ z = s & \text{parametro} \\ x = t \\ y = s - t \end{cases}$$

Cioè $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\}$

BASE $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

iii) $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

In questo caso $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$

Quindi $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ non può essere somma diretta.

24

Esame di Geometria e Algebra
Ingegneria Gestionale / Ingegneria Informatica
prova scritta del 11-7-2000

Esercizio 1. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} z^8 = 81 \\ z^7 - 27z + \bar{z} \cdot z^6 - 27\bar{z} \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ t & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

Per i valori di t per cui $Ker(f_t) \neq \{0\}$:
(ii) si determinino gli autovalori di f_t;
(iii) si dica se esiste una base di autovettori di f_t.

Esercizio 3. [Ingegneria Gestionale]
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 3x + 4y + 5z \\ 2x + 3y + 4z \end{pmatrix}$$

(i) Si trovi una base di $Ker(f)$.

(ii) Si dica se esiste una soluzione di $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Si determini un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus Ker(f)$.

Prova scritta del 11.7.2000

1) $\begin{cases} z^8 = 81 \\ z^7 - 27z + \bar{z}\cdot z^6 - 27\bar{z} \neq 0 \end{cases}$

$\boxed{i:}$ $z^8 = 81$

$z = 0$ non è sol.

$z \neq 0$ $\quad z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ $\quad z^8 = \rho^8 \cdot e^{i8\vartheta} = 81$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \rho^8 = 81 = 3^4 \\ 8\vartheta = 0 + 2k\pi \quad k \in \end{cases}$$

sol. distinte : $\begin{cases} \rho = \sqrt{3} \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{8} \quad k = 0, 1, \dots, 7 \end{cases}$

$\boxed{ii:}$ Risolviamo l'eq. $z^7 - 27z + \bar{z}\cdot z^6 - 27\bar{z} = 0$

$$(z + \bar{z})\cdot(z^6 - 27) = 0$$

$z + \bar{z} = 0$

oppure

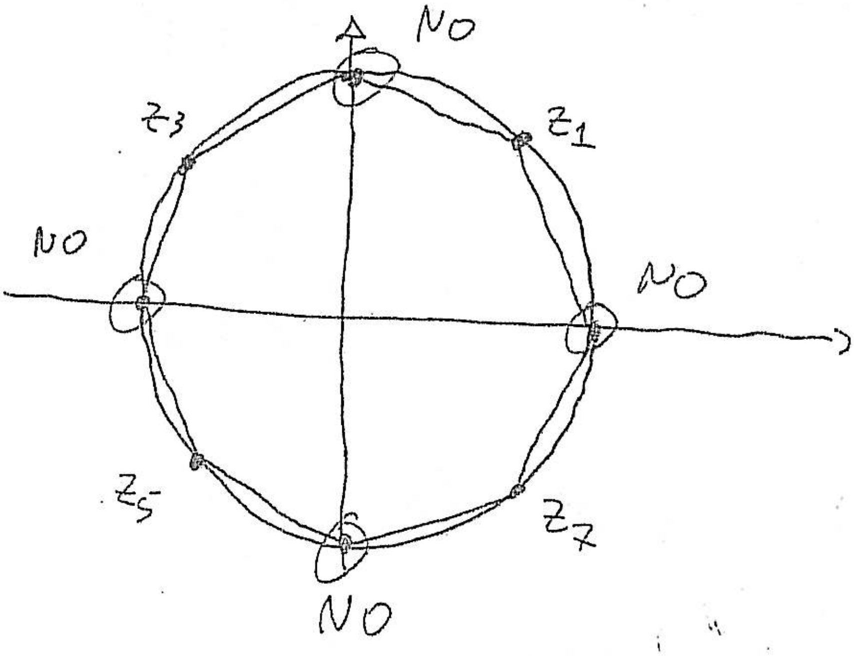
2

$z + \bar{z} = 0 \iff Re(z) = 0$

$z^6 = 27 \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{3} \\ z = \frac{2k\pi}{6} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, 5$

$z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

CONCLUSIONE: sol. del sisteme



SOL: $z_1 = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$z_3 = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$z_5 = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$z_7 = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

(2.) $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ t & 1 & -1 \end{pmatrix}$

i) <u>oss</u>. $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t \Rightarrow rg(A_t) \geq 2 \quad \forall t$

$\det A_t = 4\cdot(t-1)$

$\det A_t = 0 \iff t = 1$

Quindi, per oss., se $t=1$

$rg(A_t) = \dim(\mathrm{Im}\, f_t) = 2$

$\dim \mathrm{Ker}(f_t) = 3-2 = 1$

Se $t \neq 1$ $\quad rg = \dim \mathrm{Im} = 3$

$\dim \mathrm{Ker} = 0$

sia ora $t=1$: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

ii) [n.b. $\mathrm{Ker} \neq \{0\} \Rightarrow 0$ è autovalore!]

$A - \lambda \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -3 & 2-\lambda & 2 \end{pmatrix}$

$$P_{car} = \det(A - \lambda\, Id) = \dots = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) =$$
$$= -\lambda(\lambda - 1)^2$$

autovalori : 0 molt. alg. $= 1$

1 molt. alg. $= 2$

iii) $\exists$ base di autovettori

$\Updownarrow$

$\exists$ 2 autovettori relativi all'autovalore 1 lin. indipendenti

$\Updownarrow$

$$\dim(\operatorname{Ker}(A - 1 \cdot Id)) = 2$$

$$A - 1 \cdot Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \quad rg(A - 1 \cdot Id) \geq 2$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(A - 1 \cdot Id) \leq 1$

Quindi non $\exists$ 2 vett. lin. ind.

CIOE': non $\exists$ base di autovettori.

③ Matrice associata ad f: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \det A = 0 \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad rg(f) = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim Ker(f) = 1$$

Risolviamo col metodo di Gauss
il sistema $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

operiamo sulle righe:

$$\begin{array}{l} II - 3\,I \\ III - 2\,I \end{array} : \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$III - II : \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

CIOE': il sist. è equivalente a $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

$z = t$ parametro

$y = -2z = -2t$

$\Rightarrow Ker(f) = \{ (t$

30

Quindi

BASE $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ii) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

b

$rg(A) = 2$ (per (i))

OSS. $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

cioè $rg(A \vdots b) = rg(A)$

Quindi per il teorema di Rouché-Capelli
$rg(A) = rg(A \vdots b)$ il sistema ammette solu

$\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

E' sufficiente determinare 2 vettori v_1, v_2 t.c.
$v_1, v_2, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$. Per esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

131

Esame di Geometria e Algebra

Ingegneria Gestionale / Ingegneria Informatica

prova scritta del 5-9-2000

Esercizio 1. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} z^3 - \overline{z}^3 = 0 \\ e^{2z} - (e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} + e)e^z + e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+1} = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare del parametro reale β sia $f_\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ -\beta & -2 & \beta \end{pmatrix}$$

Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ determinare
(ii) gli autovalori di f_β;
(iii) la dimensione degli autospazi di f_β.

Esercizio 3.
Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+w \\ x+y+z+2w \\ z+w \end{pmatrix}$$

(i) Si determini una base di $Ker(f)$.

(ii) Si determinino le soluzioni del sistema $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Si determini un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus Im(f)$.

32

Esame di Geometria
prova del 5/9/2000

Traccia sol.

(1.) $\begin{cases} z^3 - \bar{z}^3 = 0 \\ e^{2z} - \left(e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} + e\right) e^z + e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+1} = 0 \end{cases}$

I ep: $z=0$ sol.

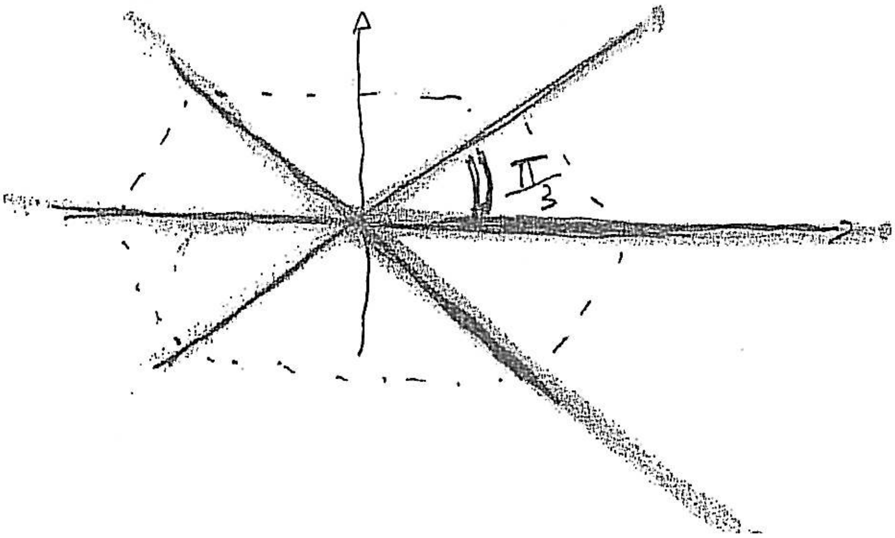
$z \neq 0$ $\quad z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

$$z^3 = \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta}$$
$$\bar{z}^3 = \rho^3 \cdot e^{-i3\vartheta}$$

$z^3 - \bar{z}^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = \rho^3 \cdot e^{-i3\vartheta}$

cioè: $\begin{cases} \rho \text{ arbitrario} \\ 3\vartheta = -3\vartheta + 2k\pi \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \rho \text{ arb.} \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{6} \end{cases}$

$k=0,1,\ldots,$



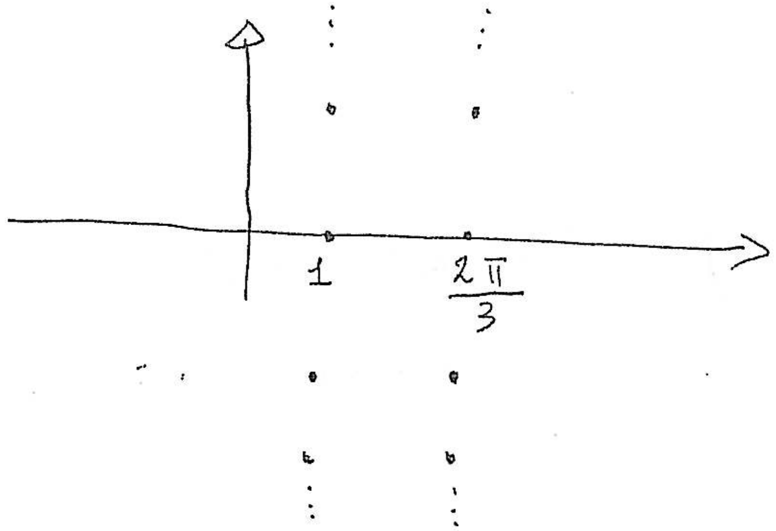
II eq.: poniamo $e^z = w$ 33

$$w^2 - \left(e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} + e\right) \cdot w + e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + 1} = 0$$

cioè
$$w = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} \\ e \end{cases}$$

$$e^z = w \Rightarrow e^z = \begin{cases} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} \\ e \end{cases}$$

cioè
$$z = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + i\, 2K\pi \qquad K \in \mathbb{Z}$$
$$z = 1 + i\, 2h\pi \qquad h \in \mathbb{Z}$$

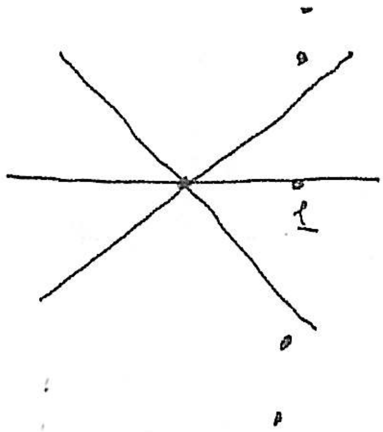


$z = 1 + i\, 2h\pi$ verifica la I eq. $\iff h = 0$

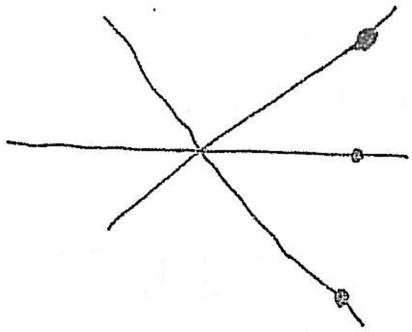
$z = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + i\, 2K\pi$ verifica la II eq. $\iff K = 0, 1, 1$

Per $h \geq 1$ o $h \leq -1$

$1 + i2h\pi \notin \{3 \text{ rette}\}$



Per $k = 0, 1, -1$ $\quad \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + i\,2k\pi \in \{3 \text{ rette}\}$



$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{2\pi}{\sqrt{3}} + i\,2k\pi = \\ &= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot k\right) \end{aligned}}$$

Conclusione:

SOL: $z = 1$; $\quad \frac{2\pi}{3} + i\,2k\pi$

$k = 0, 1, -1$

5/9/2000

35

2.

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ -\beta & -2 & \beta \end{pmatrix}$$

)

$$P_{CAR} = \det(A - \lambda I_d)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \beta-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & \beta \\ -\beta & -2 & \beta-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\beta-\lambda)\left((-1-\lambda)(\beta-\lambda) + 2\beta\right) + (-\beta)\cdot\beta = \ldots$$

$$= -\lambda\left(\lambda^2 + (1-2\beta)\lambda + \beta^2\right)$$

Autovalori : $\lambda_1 = 0$

$$\lambda_2 = \frac{-1+2\beta+\sqrt{1-4\beta}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{-1+2\beta-\sqrt{1-4\beta}}{}$$

SE $1-4\beta \geq 0$

ii) Se $1-4\beta<0$ $\exists$ unico autovalore & dim autospazio $=1$

36

Se $1-4\beta \geq 0$ $\exists$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\beta \leq \frac{1}{4}}$

Se $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$

allora $\exists$ 3 autovalori distinti

$\Rightarrow$ molt. alg. $= 1$ $\forall$ autovalore

$\Rightarrow$ dim $\ker(A-\lambda_i I) = 1$ $\forall$ autovalore λ_i

[Abbiamo: $1 \leq \dim \ker(A-\lambda_i I_d) \leq$ molt. alg.
$\forall$ autovalore λ_i]

Rimane da verificare i casi

(a) $\lambda_1 = \lambda_2$

(b) $\lambda_1 = \lambda_3$

(c) $\lambda_2 = \lambda_3$

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 \iff$ $0 = -1 + 2\beta + \sqrt{1-4\beta}$

$-2\beta + 1 = +\sqrt{1-4\beta}$ $\quad$ $\beta \leq \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} (-2\beta+1)^2 = 1-4\beta \\ \beta \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$4\beta^2 - 4\beta + 1 = 1-4\beta$$

$$\beta = 0$$

$\boxed{37}$

Per $\beta = 0$

0 è autovalore con molt. alg. $= 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Autospazio relativo $= \operatorname{Ker}(A - 0I) = \operatorname{Ker} A$

$rk(A) = 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(A - 0I) = 2$

---

b) $\lambda_1 = \lambda_3 \iff \begin{cases} 0 = -1 + 2\beta - \sqrt{1-4\beta} \\ \beta \leq \frac{1}{4} \end{cases}$ $\boxed{\text{impossibile}}$

c) $\lambda_2 = \lambda_3 \iff \Delta = 0 = 1-4\beta \iff \beta = \frac{1}{4}$

$\beta = \frac{1}{4}$ $\quad \lambda_2 = \lambda_3 = \dfrac{-1 + 2\cdot\frac{1}{4}}{2} = -\dfrac{1}{4}$

$$A - \lambda \, Id = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

38

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$rk\left(A - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot Id\right) = 2$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = 0$$

$rk\left(A - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot Id\right) = 2 \Rightarrow$ dim autospazio relativo a $\lambda = -\frac{1}{4}$ $= 1$.

<u>Conclusione</u>:

$\beta = \frac{1}{4}$ dim Autospazio relativo a $\lambda = -\frac{1}{4}$ $= 1$ dim Autosp. relativo a $\lambda = 0$ $= 1$
$\beta = 0$ dim Autosp. relativo a $\lambda = 0$ $= 2$

$\beta \leq \frac{1}{4}$ MA $\beta \neq \frac{1}{4}, 0$

$\exists$ 3 autospazi distinti di dim $= 1$

---

3. $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+w \\ x+y+z+2w \\ z+w \end{pmatrix}$$

Matrice relativa ad f: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

OSS: I^a colonna = II colonna

Quindi è suff. studiare il rango di II, III, IV $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ & $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$

$rg(A) = rg(f) = 2$

Cerchiamo base Ker con algoritmo di Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$II - I$: $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$III - II$: $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il sist. e' equiv. a $\begin{cases} x + y + w = 0 \\ z + w = 0 \end{cases}$

$w = t$ parametro

$z = -w = -t$

$y = s$ parametro

$x = -s - w = -s - t$

$$\text{Ker} = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Una

Base Ker : $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ii) Dobbiamo risolvere sistema $A \cdot X = b$

41

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

<u>OSS</u> $b =$ IV colonna $\Rightarrow$ Per il teo. di Rouché-Capelli $\exists$ soluzione

Applichiamo algoritmo di Gauss come in (i)

II − I:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

III − II:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il sistema è equiv. a

$$\begin{cases} x + y + w = 1 \\ z + w = 1 \end{cases}$$

$w = t$ par.

$z = -t + 1$

$y = s$ par.

$x = -y - w + 1 = -s - t + 1$

$$\text{sol.} = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t+1 \\ s \\ -t+1 \\ t \end{pmatrix} \middle| s,t \right.$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right.$$

iii) Abbiamo visto che $rk(A) = 2$ | 42

Quindi dim (Immagine) = 2

Immagine = < colonne di A > =

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$

[abbiamo scelto 2 col. lin. ind.]

- Immagine: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow$ dobbiamo scegliere W di dimensione $= 3 - 2 = 1$ linearmente indipendente da $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per esempio $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono lin. ind.

$\iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono base di $\mathbb{R}^3$

$\iff W \oplus \mathrm{I}\,(A) = \mathbb{R}^3$