SOLUZIONE della prova scritta del 18-02-2004

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 + 8iz - z^3\overline{z} - 8i\overline{z} = 0 \\ |e^{iz}| < 1 \end{cases}$$

Soluzione .

(i) : Fattorizzando la prima espressione otteniamo

$$z^4 + 8iz - z^3\overline{z} - 8i\overline{z} = (z - \overline{z}) \cdot (z^3 + 8i)$$

per cui la prima equazione è equivalente a

- $z = \overline{z}$; OPPURE
- $z^3 = -8i$

$z = \overline{z}$ corrisponde a dire $Im(z) = 0$.

Per risolvere la seconda equazione ponendo z nella forma esponenqziale , $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$, otteniamo

$$\varrho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = 8 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Uguagliando i moduli e gli argomenti si ha

$$\begin{cases} \varrho^3 = 8 \quad , \quad \varrho \in \mathbb{R}^+ \\ 3\vartheta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e quindi le seguenti soluzioni distinte: $\begin{cases} \varrho = 2 \\ \vartheta = \frac{3\pi + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2 \end{cases}$

Pertanto le soluzioni di (i) sono

$$z = \quad 2i \quad , \sqrt{3} - i \quad , \quad -\sqrt{3} - i \quad , Im(z) = 0$$

(ii) : Posto $z = x + iy$, tenuto conto che $|e^{ix}| = 1$ per qualsiasi x numero reale si ha

$$\begin{aligned} &|e^{iz}| < 1 && \Leftrightarrow \\ &|e^{ix-y}| < 1 && \Leftrightarrow \\ &|e^{ix}| \cdot |e^{-y}| < 1 && \Leftrightarrow \\ &e^{-y} < 1 && \Leftrightarrow \\ &y > 0 \ , \quad x = \text{qualsiasi} \end{aligned}$$

CONCLUSIONE: Ponendo la condizione $y > 0$ nella soluzione della equazione (i) otteniamo che la soluzione del sistema è data da $z = 2i$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare una base per $Ker(f)$ e una base per $Im(f)$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ t \end{pmatrix}$

(iii) Sia $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare, se esiste, un vettore non nullo $X \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(X) = g(X)$.

Soluzione .

(i) : Sia A la matrice associata, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Il determinante di A è nullo, pertanto il rango di A è ≤ 2 . Poichè il minore $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, ha determinante diverso da 0 possiamo affermare che il rango di A è 2. Quindi la dimensione dell'Immagine è $= 2$ e la dimensione del nucleo è $= 1$.

Sfruttando il minore appena considerato una base dell'immagine è data dai primi due vettori colonna della matrice A:

$$BASE\ di\ \ Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per determinare una base del Ker occorre risolvere l'equazione $A \cdot X = O_V$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 &= 0 \end{cases}$$

Poiche $rg(A) = 2$ e le righe II e III sono ind. per quanto visto precedentemente il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad\quad + 3x_3 &= 0 \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = t$, si ha $x_1 = -3t$ e quindi $x_2 = 1/3 \cdot (-2x_1 - 3x_3) = t$. Ponendo $t = 1$ una base del nucleo è data da

$$BASE\ di\ \ Ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Per il teorema di Rouché-Capelli esiste almeno una soluzione $\Leftrightarrow$ r$k(A)$ = r$k(A|b_t)$ dove $b_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ t \end{pmatrix}$. Sappiamo che $rg(A) = 2$.

La matrice $A|b_t$ diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & t \end{pmatrix}.$$

Considerando il minore

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & t \end{pmatrix}$$

abbiamo $\det(M) = 3t - 6$ e quindi $det(M) \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 2$. Pertanto se $t \neq 2$ si ha r$k(A|b_t) = 3$ e non esiste soluzione del sistema.

Analizziamo il caso $t = 2$.

Abbiamo $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot$ I colonna di A. Quindi b_2 è combinazione lineare dei vettori di A , cioè r$k(A)$ = r$k(A|b_2)$, pertanto per $t = 2$ esiste almeno una soluzione del sistema (in questo caso si ha $\dim\{soluzioni\} = 1$).

(iii) Sia B la matrice associata a g,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora esiste un vettore non nullo $X \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(X) = g(X)$ se esoltanto se $(f - g)(X) = 0_V$ $\Leftrightarrow (A - B) \cdot X = 0_V$, dove $A - B$ indica la matrice

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Quindi $f(X) = g(X)$ se e soltanto se X risolve il sistema

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 - x_2 & = 0 \\ -x_2 + 3x_3 & = 0 \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 0 \\ -x_2 + 3x_3 & = 0 \end{cases}$$

Ponedo $x_3 = s$ si ha $x_2 = 3s$ e quindi $x_1 = x_2 = 3s$. Per $s = 1$ si ha come soluzione il vettore $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Al variare del parametro reale β sia A_β la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ \beta & 0 & -\beta \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determini il polinomio caratteristico di A_β e gli autovalori, specificandone la molteplicità algebrica.

(ii) Si determini per quali valori di β la matrice A_β è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

Soluzione. (i) il polinomio caratteristico di A_β è $p_{A_\beta}(\lambda) = \det(A_\beta - \lambda Id)$. Sviluppando rispetto alla III riga si ha

$$p_{A_\beta}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & -2 \\ \beta & -\lambda & -\beta \\ 0 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \ldots = -\lambda \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 4\beta).$$

La radici del polinomio caratteristico sono quindi:

$$0 \ , \quad \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16\beta}}{2}.$$

Per il noto teorema, gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico in $\mathbb{R}$.

Ovvero, occorre distinguere i casi $\Delta = 4 - 16\beta < 0$ e $\Delta = 4 - 16\beta \geq 0$. Cioè per $\beta > \frac{1}{4}$ l'unico autovalore è $\lambda = 0$.

Per $\beta \leq \frac{1}{4}$ abbiamo i seguenti autovalori:

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = \frac{2+\sqrt{4-16\beta}}{2}$
- $\lambda_3 = \frac{2-\sqrt{4-16\beta}}{2}$

Occorre peroò distinguere i seguenti 3 casi

1. $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$
2. $\lambda_1 = \lambda_3$
3. $\lambda_2 = \lambda_3$

(notare che $\lambda_2 = \lambda_1$ è impossibile poichè $\lambda_2 \geq 1 \forall \beta$).

Il caso 3 corrisponde a dire $\Delta = 0$ ovvero $\beta = \frac{1}{4}$.

Cioè possiamo affermare che per $\beta = \frac{1}{4}$ gli autovalori sono 0 con molteplicità algebrica 1 e 1 con molteplicità algebrica 2.

Il caso 2 corrisponde a dire $\frac{2-\sqrt{4-16\beta}}{2} = 0$, ovvero $\beta = 0$.

Quindi per $\beta = 0$ gli autovalori sono 0 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 1.

Il caso 3 equivale ad affermare $\beta \neq 0, \frac{1}{4}$ ed in questo caso i tre autovalori sono distinti e quindi tutti con molteplicità algebrica 1.

(ii) Per quanto visto al punto (i) la matrice è triangolarizzabile se e soltanto se tutte le radici del polinomio caratteristico sono in $\mathbb{R}$ e quindi se e soltanto se $\beta \leq \frac{1}{4}$.

Per determinare i valori tali che la matrice A_β risulti essere diagonalizzabile occorre distinguere i casi 1, 2, 3 del punto (i).

Nel caso 1 abbiano tre autovalori distinti. Quindi possimao affermare che per $\beta \leq \frac{1}{4}$ tale che $\beta \neq 0, \frac{1}{4}$ la matrice è sicuramente diagonalizzabile.

Nel caso 2 si ha $\beta = 0$ e gli autovalori sono 2 con molteplicità algebrica 1 e 0 con molteplicità algebrica 2. Occorre determinare la molteplicità geometrica di 0. Analizziamo la matrice $A_0 - 0Id = A_0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le prime due colonne sono lin. ind. pertanto $rg(A) = 2$ e quindi $\dim(Ker(A)) = 3 - 2 = 1 = m.g.(0) \neq m.a.(0) = 2$. In questo caso la matrice non è diagonalizzabile.

Nel caso 3 si ha $\beta = \frac{1}{4}$ e gli autovalori sono 0 con molteplicità algebrica 1 e 1 con molteplicità algebrica 2. Occorre determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 1. Analizziamo la matrice $A_{\frac{1}{4}} - Id$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ \frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso le prime due colonne sono lin. ind. pertanto $rg(A_{\frac{1}{4}} - Id) = 2$ e quindi $1 = m.g.(1) \neq m.a.(0) = 2$ e la matrice non è diagonalizzabile.