Ingegneria Gestionale - Elettronica - delle telecomunicazioni
Corso di Algebra Lineare e Analisi 2 - anno accademico 2010/2011

prova scritta di ALGEBRA LINEARE
6/7/2011
TEMPO A DISPOSIZIONE: 90 minuti

Esercizio 1: Risolvere a scelta l'esercizio (1.1) oppure l'esercizio (1.2).

(1.1) Per ciascun $\lambda \in \mathbb{R}$ si determini l'insieme delle $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tali che

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda+1 \\ \lambda+1 & 4\lambda \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

(1.2) Sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & t \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Specificare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione è unica e i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui lo spazio delle soluzioni ha dimensione ≥ 1.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \right\} .$$

Si indichi un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $V = \left\langle (1,1,0,-1)^T \right\rangle \oplus W$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} .$$

- Si indichi una $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che $f \neq 0$ e che $f \mathscr{L}_A = 0$.
- Si determini la matrice $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathscr{L}_B$.

Esercizio 4. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, e sia

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\} .$$

Si indichino due vettori $a, b \in V$, ortogonali tra loro e non nulli, tali che $\|a+b\| = 15$.

Esercizio 5: Risolvere a scelta l'esercizio (5.1) oppure l'esercizio (5.2).

(5.1) In $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0 \right\} .$$

- Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che

$$\begin{cases} Av = v \text{ per } \forall v \in V \\ \\ \operatorname{rank} A = 2 \end{cases} .$$

- Si diagonalizzi A.

(5.2) Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A

(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^3$ si opera con il prodotto scalare $\bullet$ associato alla matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si determini il tipo di definizione di tale prodotto scalare.