Ingegneria Gestionale - Elettronica - delle telecomunicazioni
Corso di Algebra Lineare e Analisi 2 - anno accademico 2010/2011

prova scritta di ALGEBRA LINEARE
22/6/2011
TEMPO A DISPOSIZIONE: 90 minuti

Esercizio 1: Risolvere a scelta l'esercizio (1.1) oppure l'esercizio (1.2).

(1.1) Per ciascun $\lambda \in \mathbb{R}$ sia W_λ l'insieme delle matrici $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tali che

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0 \; .$$

Per ciascun λ si indichi una base di W_λ.

(1.2) Sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & 2 & 1 \\ t & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

(ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & 2 & 1 \\ t & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii) Specificare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione è unica e i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui lo spazio delle soluzioni ha dimensione ≥ 1.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0,\; 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \right\} .$$

Si indichi un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \right\} .$$

- Si indichi una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathrm{Im} f = V,\; \ker f \subset V \quad .$$

- Si determini la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathscr{L}_A$.

Esercizio 4. Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, e sia

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \right\} .$$

Si indichino due vettori ortogonali $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, le cui proiezioni ortogonali su V siano rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5: Risolvere a scelta l'esercizio (5.1) oppure l'esercizio (5.2).

(5.1) In $\mathbb{R}^{3\times 3}$ si diagonalizzi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} ,$$

e se ne determinino gli autospazi.

(5.2) Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A

(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^3$ si opera con il prodotto scalare $\bullet$ associato alla matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} .$$

Si determini il tipo di definizione di tale prodotto scalare.