Corso di

Algebra lineare e Analisi 2

(docente: M.Poletti)

Testi d'esame dal Settembre 2009 al 17/02/2010

ALGEBRA LINEARE - prova del 16/09/2009

ISTRUZIONI: Gli studenti dell' a.a. 08/09 DEVONO risolvere gli esercizi 1,2,3,4,5,6. Gli studenti degli a.a. precedenti POSSONO risolvere solo gli esercizi 1,2,3,4.

1) Si determini una base del sottospazio V di $\mathbb{R}^{3\times 3}$ definito da

$$V = \Big\{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : (1,2,2)A = (1,1,1)A \Big\} \ .$$

2) In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio V i cui elementi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Si indichi un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

3) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si determini $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathscr{L}_A$. Si determinino $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

4) Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, e sia

$$V = \Big\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \Big\} \ .$$

Si indichi un $a \in \mathbb{R}^3$ tale che $\|a\| = \sqrt{14}$ e che la proiezione ortogonale di a su V sia $(1,0,2)^T$.

5) Si indichi una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ avente autospazi

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\right\}, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle ,$$

e tale che $A^2 = I$.

6) Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

e sia $\bullet$ il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ associato ad A.

- Per $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ si determinino $x \bullet y, \quad x \bullet x$.
- Si determini una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.
- Si determini il tipo di definizione di A.
- Si determini $(\mathbb{R}^3)^\perp$.

ANALISI 2 - prova del 16/09/2009

1) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$$

definita da

$$f(x) = \sin \|x\| \ .$$

Si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente ortogonale e tangente a $\Gamma(f)$ nel punto $(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}, \frac{\pi\sqrt{2}}{4}, 1)^T$.

2) Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} ,$$

e sia

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente ortogonale e tangente a $LS(f; f(a))$ nel punto a.

3) Si consideri il sottinsieme compatto di $\mathbb{R}^3$

$$\Gamma = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 12 \right\} ,$$

e la funzione continua

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ .$$

Si determinino i punti di minimo e massimo assoluto di f su Γ.

4) Si consideri il sottinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1^2 \right\}$$

e la funzione misurabile

$$f(x) = 1/x_1 : A \to \mathbb{R} \ .$$

- Si provi che f è integrabile su A.
- Si calcoli $\displaystyle\int_A f$.

ALGEBRA LINEARE - prova del 12/01/2010

ISTRUZIONI: Gli studenti che debbono sostenere solo l'ESAME da 6 CREDITI di ALLIN, possono risolvere solo gli esercizi 1,2,3,4.

1) Si determinino le $x \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} x = 0 \ .$$

Si determinino le $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \ .$$

2) In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio V i cui elementi sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Si indichino sottospazi non nulli W, Z di $\mathbb{R}^4$ tali che

$$\mathbb{R}^4 = V \oplus W \oplus Z \quad .$$

3) Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , f\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Si determini $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathscr{L}_A$. Si determinino $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$. Si provi che $A^2 = 0$.

4) Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, e sia

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \right\} \ .$$

Si determinino le $a \in \mathbb{R}^3$ la cui proiezione ortogonale su V sia $(1,1,1)^T$.

5) Si indichi una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ avente autospazi

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\right\}, \quad \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ ,$$

e tale che $A^2 = A$.

6) Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

e sia $\bullet$ il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ associato ad A.

- Per $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ si determinino $x \bullet y, \quad x \bullet x$.
- Si determini una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.
- Si determini il tipo di definizione di A.
- Si determini $(\mathbb{R}^3)^{\perp}$.

ANALISI 2 - prova del 12/01/2010

1) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$$

definita da

$$f(x) = e^{x_1 x_2} \ .$$

Si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente ortogonale e tangente a $\Gamma(f)$ nel punto $(2, 1/2, e)^T$.

2) Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

la funzione definita da

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix} \ ,$$

e sia

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente ortogonale e tangente a $LS(f; f(a))$ nel punto a.

3) Si consideri il sottinsieme compatto di $\mathbb{R}^3$

$$\Gamma = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 48 \right\} \ ,$$

e la funzione continua

$$f(x) = x_1 - x_2 + x_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ .$$

Si determinino i punti di minimo e massimo assoluto di f su Γ.

4) Si consideri il sottinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1^3 \right\}$$

e le funzioni misurabili

$$f(x) = 1/x_1^{3,9} : A \to \mathbb{R} \qquad g(x) = 1/x_1^{4,1} : A \to \mathbb{R}.$$

- Si provi che f è integrabile su A.
- Si calcoli $\displaystyle\int_A f$.
- Si provi che g non è integrabile su A.

ALGEBRA LINEARE - prova del 28/01/2010

ISTRUZIONI: Gli studenti che debbono sostenere solo l'ESAME da 6 CREDITI di ALLIN, possono risolvere solo gli esercizi 1,2,3,4.

1) Senza risolvere sistemi di equazioni,

- si indichi una matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tale che
$$A\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} ,$$
- si provi che non esistono altre matrici A verificanti tale relazione.

2) In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi
$$V = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1{+}x_3 = 0,\ x_2{+}x_4 = 0\right\},\ W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$
Si provi che
$$\mathbb{R}^4 = V \oplus W \quad .$$

3) In $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi
$$V = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1{-}3x_2{-}3x_3 = 0\right\},\ W = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1{+}x_2{+}x_3 = 0\right\} .$$
Si indichi una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

- f sia iniettiva,
- per $\forall v \in V$ si abbia $f(v) \in W$.

Si determini la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathscr{L}_A$.

4) Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, e sia
$$V = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 4x_3 = 0\right\} .$$

- Si indichi un $v_0 \in V$ tale che $\|v_0\| = 20$.
- Si indichi uno $z_0 \in \mathbb{R}^3$ tale che
$$\begin{cases} \text{la proiezione ortogonale di } z_0 \text{ su } V \text{ sia } v_0 \\ \|z_0\| = 25 \end{cases} .$$

5) Si indichi una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che:

$$\begin{cases} A \text{ sia diagonalizzabile} \\ \ker A = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0\right\} \\ \operatorname{Im} A = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \end{cases} .$$

6) Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

e sia $\bullet$ il prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ associato ad A.

- ∘ Per $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$ si determinino $x \bullet y, \quad x \bullet x$.
- ∘ Si determini una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.
- ∘ Si determini il tipo di definizione di A.
- ∘ Si determini $(\mathbb{R}^3)^\perp$.

ANALISI 2 - prova del 28/01/2010

1) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

definita da

$$f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos x_2 \\ e^{x_1} \sin x_2 \end{pmatrix} .$$

Si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^4$ rispettivamente ortogonale e tangente a $\Gamma(f)$ nel punto $(0, \pi/2, 0, 1)^T$.

2) Sia

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

la funzione definita da

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - \cos 2\pi x_3 \\ x_2 - \sin 2\pi x_3 \end{pmatrix} ,$$

e sia $a = (1, 0, 0)^T$.

- Si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente ortogonale e tangente a $LS(f; f(a))$ nel punto a.
- Si disegni $LS(f; f(a))$.

3) Si consideri il sottinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 + 5x_2^2 = 8 \right\} ,$$

e la funzione continua

$$f(x) = x_1 x_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} .$$

Si determinino i punti di minimo e massimo assoluto di f su Γ.

4) Si consideri il sottinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 \leqslant 1, \ \ \frac{1}{x_1} \leqslant x_2 \leqslant \frac{1}{x_1} + \frac{1}{\sqrt{x_1}} \right\}$$

e la funzione misurabile

$$f(x) = 1 : A \to \mathbb{R} .$$

Si dica (motivando la risposta) se f sia o non sia integrabile su A.

ALGEBRA LINEARE - prova del 17/02/2010

ISTRUZIONI: Gli studenti che debbono sostenere solo l'ESAME da 6 CREDITI di ALLIN, possono risolvere solo gli esercizi 1,2,3,4.

1) Si risolva il sistema

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = (0 \ \ 0 \ \ 0) \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{1\times 2} \ .$$

Senza risolvere ulteriori sistemi di equazioni, si determinino tutte le matrici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tali che

$$A\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \ .$$

2) In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$V = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle, \ \ W = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

Si dica se la loro somma sia o non sia diretta.

3) In $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 5x_3 = 0 \right\} \ .$$

Si indichi una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

- f non sia iniettiva,
- per $\forall v \in V$ si abbia $f(v) = v$.

Si determini la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathscr{L}_A$.

4) Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, e sia

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \ , 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \right\} \ .$$

- Si indichi un $v_0 \in V$ tale che $\|v_0\| = 18$.
- Si determinino tutti gli $z_0 \in \mathbb{R}^3$ tali che la proiezione ortogonale di z_0 su V sia v_0 .

5) Si indichino due matrici $A \neq B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ aventi entrambe per autospazi

$$V = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\right\} \quad , W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

Senza calcolare esplicitamente AB e BA, si provi che $AB = BA$.

6) In $\mathbb{R}^3$ si opera con un prodotto scalare $\bullet$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \, , \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \, , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \, .$$

Si determini una base ortogonale del sottospazio

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \quad .$$

1) Sia $\omega > 0$ un numero reale assegnato. Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

definita da

$$f(x_1) = \begin{pmatrix} \cos \omega x_1 \\ \sin \omega x_1 \end{pmatrix} .$$

Per $\forall a \in \mathbb{R}$ si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente ortogonale e tangente a $\Gamma(f)$ nel punto $(a, \cos \omega a, \sin \omega a)^T$.

2) Sia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da

$$f(x) = e^{x_1 x_2} ,$$

e sia $a = (2, 1/2)^T$.

- Si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente ortogonale e tangente a $LS(f; f(a))$ nel punto a.
- Si disegni $LS(f; f(a))$.

3) Si consideri il sottinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 4x_2^2 = 5 \right\} ,$$

e la funzione continua

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} .$$

Si determinino i punti di minimo e massimo assoluto di f su Γ.

4) Si consideri il sottinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 \leqslant 1, \quad \frac{-1}{\sqrt{x_1^3}} \leqslant x_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x_1^3}} \right\}$$

e la funzione misurabile $f : A \to \mathbb{R}$ definita q.o. da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x_2}} .$$

Si dica (motivando la risposta) se f sia o non sia integrabile su A.

ALGEBRA LINEARE - prova del 09/06/2010

ISTRUZIONI: Gli studenti che debbono sostenere solo l'ESAME da 6 CREDITI di ALLIN, possono risolvere solo gli esercizi 1,2,3,4.

1) Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ esista una ed una sola matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tale che

$$A\begin{pmatrix} 12 & \lambda \\ \lambda & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+\lambda & \lambda+3 \\ 12-\lambda & \lambda-3 \end{pmatrix} .$$

Per ciascuno di tali λ, si determini A.

2) In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio

$$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle .$$

Si indichino due sottospazi $W \neq Z$ di $\mathbb{R}^4$ tali che

$$\mathbb{R}^4 = V \oplus W = V \oplus Z .$$

3) In $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 5x_2 = 0 \right\} , W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 7x_3 = 0 \right\} .$$

Si indichi una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(V) = W .$$

Si determini la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathscr{L}_A$.

4) Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, e sia

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \right\} .$$

- Si indichi una base ortonormale di V.
- Si dia una rappresentazione analitica (parametrica o cartesiana) dell'insieme

$$\Gamma = \left\{ a \in V : \|a\| = 1 \right\} .$$

5) Si indichi una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che:

- $\det A = 0$,
- $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0\}$ sia un autospazio di A di autovalore 7.

Senza calcolare esplicitamente A, si diagonalizzi A .

6) In $\mathbb{R}^3$ si opera con un prodotto scalare $\bullet$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \, , \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \, , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \, .$$

Si determini una base ortogonale del sottospazio

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \, .$$

ANALISI 2 - prova del 09/06/2010

1) Si considerino l'aperto $\Omega = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 21\Big\} \subset \mathbb{R}^2$, e la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sqrt{21^2 - \|x\|^2} \ .$$

Si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente ortogonale e tangente a $\Gamma(f)$ nel punto $(7, 14, 14)^T$.

2) Sia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da

$$f(x) = 9x_1^2 - 4x_2^2 \ ,$$

e sia $a = (1/3, 1/2)^T$.

- Si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^2$ rispettivamente ortogonale e tangente a $LS(f; f(a))$ nel punto a.
- Si disegni $LS(f; f(a))$.

3) Si consideri il sottinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 25\Big\} \ ,$$

e la funzione continua

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ .$$

Si determinino i punti di minimo e massimo assoluto di f su Γ.

4) Si consideri il sottinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$

$$A = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1\Big\}$$

e la funzione misurabile $f : A \to \mathbb{R}$ definita q.o. da

$$f(x) = \frac{1}{x_1\sqrt{x_2}} \ .$$

Si provi che f è integrabile su A, e si calcoli $\displaystyle\int_A f$.

ALGEBRA LINEARE - prova del 30/06/2010

ISTRUZIONI: Gli studenti che debbono sostenere solo l'ESAME da 6 CREDITI di ALLIN, possono risolvere solo gli esercizi 1,2,3,4.

1) Per ciascun $\lambda \in \mathbb{R}$ si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda & 8 \\ 5\lambda & 1 & 20 \end{pmatrix} .$$

2) In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\}, \quad W = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subset V .$$

Si indichi un sottospazio Z di V tale che

$$V = W \oplus Z .$$

3) In $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} .$$

Si indichi una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(V) \subset V, \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 2.$$

Si determini la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathscr{L}_A$.

4) Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, e sia

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \right\} .$$

- Si indichi una base ortonormale di V;
- la si completi ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

5) Si indichi una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

- avente per autospazi

$$V = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\right\}, \quad W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \ ,$$

- e tale che $A^2 = I$.

6) In $\mathbb{R}^3$ si opera con un prodotto scalare $\bullet$ tale che

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ , \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \ , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Si determini una base ortogonale del sottospazio

$$V = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ .$$

ANALISI 2 - prova del 30/06/2010

1) Si consideri la funzione $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+x} \\ \dfrac{1}{1-x} \end{pmatrix} .$$

Si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente ortogonale e tangente a $\Gamma(f)$ nel punto $(0, 1, 1)^T$.

2) Sia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da

$$f(x) = 2x_1x_2 - x_1 - x_2 \ ,$$

e sia $a = (1, 1)^T$.

- Si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^2$ rispettivamente ortogonale e tangente a $LS(f; f(a))$ nel punto a.
- Si disegni $LS(f; f(a))$.

3) Si consideri il sottinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1^4 + x_2^2 = 1 \right\} ,$$

e la funzione continua

$$f(x) = x_1x_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ .$$

Si determinino i punti di minimo e massimo assoluto di f su Γ.

4) Si consideri il sottinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{1}{x_1^2} \right\}$$

e la funzione misurabile $f : A \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 1 \ .$$

Si provi che f non è integrabile su A.

ALGEBRA LINEARE - prova del 21/07/2010

ISTRUZIONI: Gli studenti che debbono sostenere solo l'ESAME da 6 CREDITI di ALLIN, possono risolvere solo gli esercizi 1,2,3,4.

1) Per ciascun $\lambda \in \mathbb{R}$ si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2\lambda & 2\lambda & \lambda \\ 1 & 2 & 3 & \lambda \end{pmatrix} .$$

2) In $\mathbb{R}^6$ si considerino i vettori

$$a_1 = (1,1,0,0,1,1)^T, \quad a_2 = (3,3,0,0,1,1)^T .$$

Si verifichi che la famiglia

$$(a_1, a_2)$$

è linearmente indipendente; la si estenda ad una base di $\mathbb{R}^6$.

3) In $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottospazio

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\} .$$

Si indichi una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathrm{Im}(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \ \ker(f) = V .$$

Si provi che $f^2 = 0$.
Si determini la matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathscr{L}_A$.

4) Si consideri $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, e sia

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : -3x_1 + 4x_3 = 0 \right\} .$$

Si determinino i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che:

- abbiano $(12, 0, 9)^T$ come proiezione ortogonale su V,
- abbiano norma 25.

5) In $\mathbb{R}^{3\times 3}$ si diagonalizzi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \quad .$$

6) In $\mathbb{R}^3$ si opera con il prodotto scalare $\bullet$ associato alla matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Si determini $\left(\mathbb{R}^3\right)^{\perp}$.

ANALISI 2 - prova del 21/07/2010

1) Si consideri il sottinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$ definito da:

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{0\big\} ,$$

e la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|} .$$

Per $\forall \theta \in \mathbb{R}$, si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente ortogonale e tangente a $\Gamma(f)$ nel punto $(\cos\theta, \sin\theta, 1)^T$.

2) Sia

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

la funzione definita da

$$f(x) = \cos^2 x_1 + \sin^2 x_2 ,$$

e sia $a = (1, 1)^T$.

- Si provi che a è un punto regolare di f.
- Si determinino i sottospazi affini di $\mathbb{R}^2$ rispettivamente ortogonale e tangente a $LS(f; f(a))$ nel punto a.
- Si disegni $LS(f; f(a))$.

3) Si consideri il sottinsieme compatto di $\mathbb{R}^3$

$$\Gamma = \Big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\Big\} ,$$

e la funzione continua

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} .$$

Si determinino i punti di minimo e massimo assoluto di f su Γ.

4) Si consideri il sottinsieme misurabile di $\mathbb{R}^2$

$$A = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R},\quad 0 \leqslant x_2 \leqslant e^{-x_1^2}\Big\}$$

e la funzione misurabile $f : A \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x_1 .$$

Si provi che f è integrabile su A.
Si calcoli $\displaystyle\int_A f(x)\mathrm{d}x$.