Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 12/6/2013
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

	MARCO	
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

CORSO DI LAUREA: INGEGNERIA

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 2 + 2\sqrt{3}i$. Allora $z^3 =$ $\boxed{-64}$

- Sia $z = 1 - \sqrt{3}i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{2\, e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

- Dati W, Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}, \; Z = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_2 + x_3 = 0\},$$

determinare una base di $W \cap Z$: $\boxed{\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$ $\boxed{-4\text{[illegible]}}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile X vero | falso

- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore per l' applicazione lineare l_A associata alla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ se $t =$ $\boxed{-3}$

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si consideri l'autovalore $\lambda_0 = 1$. Allora: $m.a.(1) =$ $\boxed{4}$; $m.g.(1) =$ $\boxed{2}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} =$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

sol ①

$$\begin{cases} z^2 = -|z| \cdot \bar{z}^2 \\ |z - i| > |z| \end{cases}$$

I: $\rho^2 \cdot e^{i2\vartheta} = -\rho \cdot \rho^2 \cdot e^{-2i\vartheta}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = \rho^3 \\ 2\vartheta = \pi - 2\vartheta + 2k\pi \end{cases}$$

$\rho = 0$

$z = 0$

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \quad k = 0,1,2,3 \end{cases}$$

II: $|z - i| > |z| \Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ qualsiasi} \\ y < \frac{1}{2} \end{cases}$

SOL: $z_0 = 0$

$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Es (2) ②

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & t & -t \\ t & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(i)

$rk(A_t) = 3 \iff t \neq 2$
$\dim(\ker) = 0$

$rk(A_t) = 2 \iff t = 2$
$\dim(\ker) = 1$

(ii) $t \neq 2$ $\exists!$ soluzione

$t = 2$ $\quad rk(A) = 2$

$$(A \vdots b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & \underbrace{1 \quad 3}_{} & & 4 \end{pmatrix}$$

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = v_2 + v_3$ $\quad rk(A \vdots b) = 2 = rk(A)$

$\Rightarrow \exists\ \infty$ SOLUZIONI

(iii) $\operatorname{Ker}(f_t) \subset \operatorname{Im}(f_t)$? ③

Per $t \neq 2$ $\quad \operatorname{Ker}(f_t) = \{0_V\} \subset \operatorname{Im}(f_t)$

Per $t = 2$ $\quad \operatorname{Ker}(f_t) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\operatorname{Im}(f_t) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{Ker} \not\subset \operatorname{Im}$

<u>SOL</u>. $\quad \operatorname{Ker} \subset \operatorname{Im} \iff t \neq 2$

Es. 3 $\quad \mathrm{Im} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Es. 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

AUTOVALORI:

0	m.a. = 2	m.g. = 1
1	m.a. = 1	m.g. = 1
4	m.a. = 1	m.g. = 1

AUTOVETTORI

$\lambda=0 \qquad V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda=1 \qquad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda=4 \qquad V_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

A è triangolarizzabile

A non è diagonalizzabile