Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 10/1/2013

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

[redacted] (Cognome) [redacted] (Nome) [redacted] (Numero di matricola)

CORSO DI LAUREA: INGEGNERIA [redacted]

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Siano $z = 4 + i$, $w = 1 + 2i$. Allora $z \cdot \overline{w} =$ $\boxed{6 - 7i}$ +

- Sia $z = -1 + \sqrt{3}i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{2 e^{\frac{2}{3}\pi i}}$ +

- Dato W il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\},$$ determinare una base di W: $\boxed{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}$ +

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{4}$ +

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ A è diagonalizzabile | ~~vero~~ | falso | +

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = $\boxed{1}$ +

- Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cancel{A_4} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$ +

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 1 è = $\boxed{1}$ +

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ +

9

compito 10-1-2013

Treccie SOL.

(1) $\begin{cases} z^4 = -64\pi^4 \\ e^z = e^{2\pi} \end{cases}$

1.eq: $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ $\qquad -64\pi^4 = (64 \cdot \pi^4) \cdot e^{i\pi}$

$$\begin{cases} \rho^4 = 64\pi^4 , \quad \rho \in \mathbb{R}^+ \\ 4\vartheta = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

sol. distinte : $\begin{cases} \rho = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\pi \\ \vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \quad k = 0,1,2,3 \end{cases}$

$z_0 = 2\pi + 2\pi i$

$z_1 = -2\pi + 2\pi i$

$z_2 = -2\pi - 2\pi i$

$z_3 = 2\pi - 2\pi i$

2.eq: $e^z = e^{2\pi} \iff z = 2\pi + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$

SOLUZIONI SISTEMA : $z_0 = 2\pi + 2\pi i$

$z_3 = 2\pi - 2\pi i$

2 $A_t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ t & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

i) Considero $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(M) = -t(3-t)$.

$\det(M) = 0 \iff t = 0, 3$

$\Rightarrow$ Se $t \neq 0, 3$ $\quad rk(A_t) = 3$

$\dim(\ker) = 0$

casi particolari:

<u>$t=0$</u> $\quad A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$rg(A_0) = rg\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ poiché riga 2 $= (0\ 0\ 0)$

$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$ $\quad \Rightarrow \quad rk(A_0) = 2$

$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ $\quad \dim(\ker(A_0)) = 1$

$t=3$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

elimino riga 1:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(N) = -9 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rk(A_3) = 3$$

$$\dim(\mathrm{Ker}(A_3)) = 0$$

(ii)

$$(A_t \vdots b) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ t & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$ matrice 4×4

$$\det(A_t \vdots b) = \cdots = -3t(-t+2)$$

Quindi se $t \neq 0, 2$ $\quad rk(A_t \vdots b) = 4$

$$rk(A_t \vdots b) = 4 > 3 \geqslant rk(A_t)$$

$\Rightarrow$ Per $t \neq 0, 2$ non $\exists$ soluzione.

Per $t = 0, 2$ $\quad rk(A_t \vdots b) \leqslant 3$

Per quanto visto in (i)

Se $t = 2$ $\quad rk(A_t) = 3 \leq rk(A_t : b) \leq 3$

$\Rightarrow \quad rk(A_t) = rk(A_t : b) = 3$

CIOE' $\exists$ soluzione

Per $t = 0$ $\quad rk(A_t) = 2$ visto in (i)

vediamo se $rk(A_t : b) = 2$ oppure 3

$$(A_t : b) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

eliminano riga 2, colonna 1

Il minore $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ha $\det = 2 \neq 0$

QUINDI $rk(A_t : b) = 3$

CIOE'

Per $t = 0$ $\quad rk(A_t) = 2 < 3 = rk(A_t : b)$

$\Rightarrow$ NON $\exists$ soluzione

$\boxed{\text{CONCLUSIONE: } \exists \text{ soluzione} \Leftrightarrow t = 2}$

(iii) $t=0$ $\quad rk(A_t)=2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{L}_{A_t}))=2$

Colonne 1, colonne 2 sono lin. ind

$\Rightarrow$ Base di $\mathrm{Im}(\mathcal{L}_{A_t}) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Cerco $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ $\quad (\dim = 4-2)$

tale che $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_1, w_2 \right\}$ = BASE di $\mathbb{R}^4$

Ad esempio $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2$

(3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad f^2 = 0$$

Posso scegliere $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ = 1ª colonna di A. $rk(A)=1 \Rightarrow$ 2ª colonna $= \begin{pmatrix} t \\ 5t \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 5 & 5t \end{pmatrix}$$ con t TALE CHE

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 5t+1 & 5t^2+t \\ 25t+5 & 25t^2+5t \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = 0 \iff t = -\frac{1}{5}$$

4

i)
$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -3-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \dots = \lambda^3(\lambda+3)$$

autovalori : $\lambda_0 = 0$ m.a. $= 3$

$\lambda_1 = -3$ m.a. $= 1$

cerchiamo le molt. geometriche

Poiché $1 \leq$ m.g. $\leq$ m.a.

si ha m.g.$(\lambda_1) = 1$

m.g.$(\lambda_0) = \dim(\operatorname{Ker}(A - 0 \cdot Id)) = \dim \operatorname{Ker}(A)$

$rg(A) = 2$ poiché   4° col = 1° col.

3° col. $= \frac{1}{3} \cdot$ 2° col.

$\Rightarrow$ m.g.$(\lambda_0) = 4 - 2 = 2$

(ii)

Autovettori relativi a $\lambda_0 = 0$:

$$\Leftrightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x_1 \qquad\qquad\qquad -x_4 = 0 \\ \qquad 3x_2 + x_3 \qquad\quad = 0 \\ \quad -9x_2 - 3x_3 \qquad = 0 \\ -2x_1 \qquad\qquad\quad -2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= s \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x_4 &= -t \\ x_3 &= -3s \end{aligned}$$

Parametri

$$V_0 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Autovettori relativi a $\lambda_1 = -3$

$$\Leftrightarrow \quad (A + 3\, Id) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x_1 \qquad\qquad\qquad -x_4 = 0 \\ \qquad 6x_2 + x_3 \qquad\quad = 0 \\ \quad -9x_2 \qquad\qquad\quad = 0 \\ -2x_1 \qquad\qquad\quad + x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = 0$
$x_3 = 0$

$x_1 = t$

$x_4 = 2t$

$$V_1 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

(iii) A non è diagonalizzabile perché per $\lambda_0 = 3$ si ha

$$m.g.(\lambda_0) = 2 < 3 = m.a.(\lambda_0)$$