Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 19/12/2012

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

[redacted] (Cognome) [redacted] (Nome) [redacted] (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i \implies z^4 = \boxed{-36}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\} , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \rangle .$$

Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ vero ~~falso~~

Determinare una base di $W \cap Z$:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}}$$

9

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{3} \qquad rg(A) = \boxed{3}$

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{2}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile ~~vero~~ falso

- Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$\cancel{A_1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

compito 19/12/2012

1 $\begin{cases} (z+i)^2 = 2i(\bar{z}-i) \\ |z-4| \leq |z| \end{cases}$

I: $w = z+i$

$$w^2 = 2i \cdot \overline{w}$$

$w = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

$\rho^2 \cdot e^{i2\vartheta} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \rho \cdot e^{-i\vartheta}$ $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} \rho^2 = 2\rho & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ 2\vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

sol:

$\rho = 0$ $(\Leftrightarrow z = 0)$

$$\begin{cases} \rho = 2 \\ \vartheta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, & k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

$w_0 = \sqrt{3} + i$ $\qquad z_0 = \sqrt{3}$

$w_1 = -\sqrt{3} + i$ $\qquad z_1 = -\sqrt{3}$

$w_2 = -2i$ $\qquad z_2 = -3i$

$w_4 = 0$ $\qquad z_4 = -i$

②

II: $|z-4| \leq |z| \iff x \geq 2$
y qualsiasi

sol. sistema: $\not\emptyset$

(NON $\exists$ sol sistema)

---

② $A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ 0 & t & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det = -t^2 + 1$

i)

$t \neq \pm 1$ dim Im $= 3$
dim Ker $= 0$

$t = 1$ dim Im $= 2$
-1 dim Ker $= 1$

ii) Per $t \neq \pm 1$ $\exists$ unica soluzione

$t = -1$

$$\left.\begin{array}{l} rk(A) = 2 \\ rk(A \vdots b) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \infty \text{ sol.}$$

$t = 1$

$$\left.\begin{array}{l} rk(A) = 2 \\ rk(A \vdots b) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{non } \exists \text{ sol.}$$

(iii) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus \mathrm{Im}(f_t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dim(\mathrm{Im}(f_t)) = 2 \\ \& \\ \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, v_1, v_2 \right\} \text{ base di } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

se $\{v_1, v_2\}$ base di $\mathrm{Im}(f_t)$

$t = -1$

Base $\quad \mathrm{Im}(f_t) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{O.K.}$$

$t = 1$

Base $\quad \mathrm{Im}(f_t) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$ non sono in somma diretta

SOLUZIONE:

$$\mathbb{R}^3 = W \oplus \mathrm{Im}(f_t) \iff t = -1$$

ES. 3

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \\ 6 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(f)$ ha $\dim = 3 - 2 = 1$

scelgo $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f)$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -19/7 \\ 1 & 1 & -9/7 \\ 6 & 1 & -44/7 \end{pmatrix}$$

ES. 4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = -\lambda^2 (1-\lambda)(-4+\lambda)$$

AUTOVALORI:

0	m.a. = 2	m.g. = 1
1	m.a. = 1	m.g. = 1
4	m.a. = 1	m.g. = 1

Poiché $\quad$ m.a.$(0) = 2 \neq 1 = $ m.g.(0)

A non è diagonali~~zza~~zzabile

Autovettori

$\lambda = 0 \qquad V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda = 1 \qquad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda = 4 \qquad V_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$