Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2011/2012

**Prova scritta del 27/06/2012**
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

| (Cognome) | (Nome) | (Numero di matricola) |
|---|---|---|
| | [illegible] | |

## PRIMA PARTE

| PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1 |
|---|
| calcoli e spiegazioni non sono richiesti |

- Sia $z = 1 + i$. Scrivere nella forma cartesiana $z^4$ : $\boxed{-4}$

- Dati $W$ e $Z$ i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ :

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0\} , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle. \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$$

| ~~vero~~ | falso |
|---|---|

- Dato $W$ il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$ :

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} \text{ determinare una base di } W:$$

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{3} \qquad \text{rg}(A) = \boxed{3}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile

| ~~vero~~ | falso |
|---|---|

- $A$ matrice $3 \times 3$, $\det(A) = 0 \implies 0$ è autovalore di$A$

| ~~vero~~ | falso |
|---|---|

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 1 è = $\boxed{3}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

27. 6. 2012



1) $\begin{cases} z^6 = 27 \\ |z-i| > |z| \end{cases}$

I: $\quad z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$

$z^6 = 27 \iff \begin{cases} \rho^6 = 27 \\ 6\vartheta = 0 + 2k\pi \end{cases}$

sol. distinte $\begin{cases} \rho = \sqrt{3} \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{6} \end{cases} \quad k = 0, \dots, 5$

$\sqrt{3}, \ \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}, \ -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}, \ -\sqrt{3}, \ -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}, \ \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$

II: $\quad |z-i| > |z| \iff \sqrt{x^2+(y-1)^2} > \sqrt{x^2+y^2}$

$\iff y < \frac{1}{2}$, $x$ qualsiasi.

conclusione: sol. sistema

$\pm\sqrt{3}, \ -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}, \ \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$

(2) $A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & t & 1 \\ 3 & 0 & -t \end{pmatrix}$

$\det(A_t) = 3 - t$

- $t \neq 3 \Rightarrow rg(\ell_{A_t}) = 3$
  $\dim(\ker \ell_{A_t}) = 0$

- $t = 3$ $\quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A_3) = 0$

  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$ $\Rightarrow$ $rg(\ell_A) = 2$
  $\dim(\ker(\ell_A)) = 3 - 2 = 1$

---

ii) $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$t \neq 3$ $\quad \exists!$ soluzione

$t = 3$ $\quad (A \vdots b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad b =$ III colonna

$rg(A) = rg(A \vdots b) = 2 \Rightarrow \exists$ soluzione

$\dim\{\text{soluzioni}\} = 1$

iii) $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 3x_3 = -3 \end{cases}$$

$\vdots$

soluzioni : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

3) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \text{I colonna } A}$ ; $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = II colonna A

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ = III colonna A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 2 \Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Im}) = 2$, $\dim(\mathrm{Ker}) = 1$ $\Rightarrow$ f non è biettiva

4)
$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \dots = \lambda^4$$

autovalori: $\lambda_0 = 0 \qquad m.a.(0) = 4$

$m.g.(0) = \dim(\mathrm{Ker}(\ell_A))$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I colonna = III colonna
II colonna = 0
$\Rightarrow rg(A) = 2$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(\ell_A)) = 4 - 2 = 2$

$\Rightarrow m.g.(0) = 2$

(ii) AUTOVETTORI $\Leftrightarrow$ $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = 0$
$x_3 = t$
$x_2 = s$
$x_1 = -t$

AUTOVETTORI: $\left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : (s,t) \neq (0,0) \right\}$ (5)

---

iii) $A^2 = 0$ matrice nulla

$\Rightarrow \quad \lambda_0 = 0$ con $m.a. = 4 = m.g.$