Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2011/2012

Prova scritta del 18/01/2012
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) MARCO (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 1 + i$. Scrivere nella forma cartesiana z^{-1} : $\boxed{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}, \ Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W \oplus Z$$

vero | ~~falso~~

- Dato W il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$$ determinare una base di W:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{5} \qquad \text{rg}(A) = \boxed{1}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{2}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile ~~vero~~ | falso

- A matrice 3×3, $\det(A) = 0 \implies 0$ è autovalore di A ~~vero~~ | falso

- $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 1 è $= \boxed{2}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

ES. 1

$$\begin{cases} z^6 = 4\cdot\bar{z}^2 \\ e^{\pi z} = -\dfrac{1}{e^{\pi}} \end{cases}$$

I. $z = \rho\cdot e^{i\vartheta} \Rightarrow z^6 = \rho^6\cdot e^{i6\vartheta}$; $\bar{z}^2 = \rho^2\cdot e^{-2i\vartheta}$

$z^6 = 4\bar{z}^2 \iff \rho^6\cdot e^{i6\vartheta} = 4\cdot\rho^2\cdot e^{-2i\vartheta}$

$$\iff \begin{cases} \rho^6 = 4\rho^2 \ , \ \rho\in\mathbb{R}^+ \\ 6\vartheta = -2\vartheta + 2k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

SOLUZIONI distinte: $\rho = 0 \ (\iff z = 0)$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \\ \vartheta = \dfrac{2k\pi}{8} \quad k = 0, 1, \dots, 7 \end{cases}$$

$\sqrt{2}$

$1+i$

$\sqrt{2}i$

$-1+i$

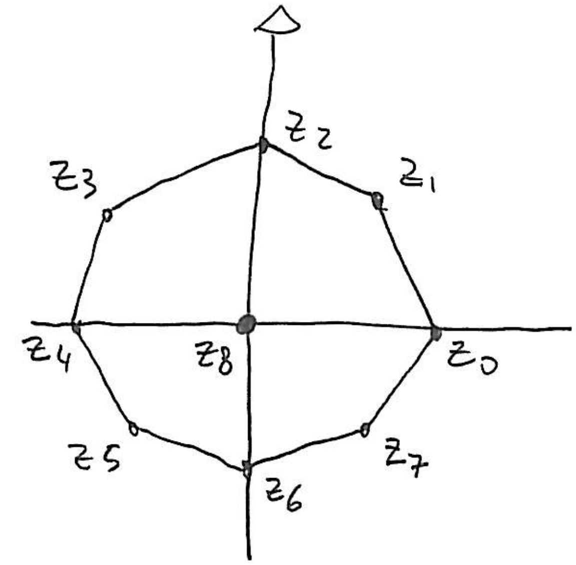
$-\sqrt{2}$

$-1-i$

$-\sqrt{2}i$

$1-i$

0



II $\quad e^{\pi z} = -\dfrac{1}{e^{\pi}} = e^{i\pi} \cdot e^{-\pi} = e^{-\pi + i\pi}$

$\iff \quad \pi z = -\pi + i\pi + 2k\pi i \quad , k \in \mathbb{Z}$

$\iff \quad z = -1 + i(1+2k) \quad k \in \mathbb{Z}$

SOLUZIONI del sistema $\begin{cases} \text{I} \\ \text{II} \end{cases}$ $\iff$

$z_3 = -1 + i \qquad k = 0$

$z_5 = -1 - i \qquad k = -1$

ES. 2

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & t \\ 2 & -3 & t \\ -3 & t & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_t) = t^2 - 3t + 2$$

$$\det(A_t) = 0 \iff t = 1, 2$$

QUINDI per $t \neq 1, 2$ $\det \neq 0 \Rightarrow rg(A_t) = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dim(\mathrm{Im}) = 3 \\ \dim(\mathrm{Ker}) = 3 - 3 = 0 \end{cases}$$

$\underline{t=1}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$\det(A_1) = 0$

$\det(M) = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A_1) = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dim(\mathrm{Im}) = 2 \\ \dim(\mathrm{Ker}) = 1 \end{cases}$$

$t = 2$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$\det(A_2) = 0$

$\det(M) \neq 0 \Rightarrow rg(A_2) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\mathrm{Im}) = 2 \\ \dim(\mathrm{Ker}) = 1 \end{cases}$

ii) $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Per il Teorema di Rouché - Capelli:

$\exists$ soluzione $A_t \cdot X = b \iff rg(A_t) = rg(A_t \vdots b)$

A_t matrice 3×3 $(A_t \vdots b)$ matrice 3×4

$t \neq 1, 2$ $3 = rg(A_t) \leq rg(A_t \vdots b) \leq 3$

$\Rightarrow$ $rg(A_t) = 3 = rg(A_t \vdots b)$

$\Rightarrow$ $\exists$ UNICA SOLUZIONE

casi particolari:

$\boxed{t=2}$ $(A_2 \vdots b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $rg(A_2) = 2$
(visto in (i))

$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \cdot (\text{III colonna di } A)$

$\Rightarrow$ $rg(A_2) = 2 = rg(A_2 \vdots b)$

$\Rightarrow$ $\exists$ soluzione & $\dim\{\text{soluzioni}\} = \underline{1}$

$\boxed{t=1}$ $\quad (A_1 : b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad rg(A_1) = 2$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad det(M) = 10 \neq 0 \Rightarrow rg(A_1 : b) = 3$

eliminiamo
II colonna

CIOE' per $t=1$ $\qquad rg(A_1) = 2 < 3 = rg(A_1 : b)$

$\Rightarrow$ non $\nexists$ soluzione

(iii) $\quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} Im(f_t) \oplus W$

$dim(W) = 1 \Rightarrow$ necessariamente $dim(Im(f_t)) = 3 - 1$

$\Rightarrow$ per $t \neq 1, 2$ $\quad dim(Im(f_t)) = 3$, cioè $Im(f_t) = \mathbb{R}^3$
e non può essere in somma diretta con W.

Unica possibilità $\quad t = 1, 2.$

$\boxed{t=2}$: Base $Im(f_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Base $W = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f_2) \oplus W \iff \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 6 \neq 0 \implies \text{è una base}$$

$\implies$ Per $t = 2$ $\qquad \mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f_2) \oplus W$

$\boxed{t=1}$: Base $\mathrm{Im}(f_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Base $W = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0 \implies \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

non è una base di $\mathbb{R}^3$

$$\implies \mathbb{R}^3 \neq \mathrm{Im}(f_1) + W$$

(In effetti $W \subseteq \mathrm{Im}(f_1)$)

$\boxed{\text{ES. 3}}$ $\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ f è univocamente determinata dal valore sui vettori di una base.

I colonna di A $= f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

II colonna di A $= f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) =$

$= f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

III colonna di A $= f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) =$

$= f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} rg(f) = 3 \\ \dim(\ker(f)) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ surgettiva} \\ \& \\ f \text{ iniettiva} \end{cases} \Rightarrow f$ biiettiva

$\boxed{\text{Es. 4}}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4$

AUTOVALORI: $\lambda_0 = 0$ $\quad m.a.(0) = 4$

$m.g.(0) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 4 - rg(A) = 2$

poiché $rg(A) = 2$ $\left[\begin{array}{l} \text{III col} = 0 \\ \text{IV col} = -\text{I col} \quad \text{I, II lin. ind} \end{array}\right]$

ii) Autospazio relativo a $\lambda_0 = \mathrm{Ker}(A)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 0 \\ -4x_1 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $x_2 = 0$, $x_4 = t$, $x_3 = s$, $x_1 = t$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A) = \text{Autospazio relativo a } \lambda_0 = 0 = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$

iii) A non è diagonalizzabile perché

$$m.g.(0) = 2 \neq 4 = m.a.(0)$$

iv) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice nulla

La matrice nulla (notazione: O) è diagonale, quindi in particolare è diagonalizzabile.

<u>OPPURE</u>. $p_{A^2}(\lambda) = \lambda^4$ autovalore 0, $m.a.(0) = 4$

$$m.g.(0) = 4 - rg(A^2) = 4 - 0 = 4 = m.a.(0)$$

$\Rightarrow$ A^2 è diagonalizzabile.