Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2016/2017

Corso di laurea in Ingegneria

Prova scritta del 21/12/2016

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

	MARCO	
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• Sia $z = -6i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{6 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi}}$

• $z = 1 - 2i$, $w = 4 + i$ $\implies$ $Re(z \cdot w) =$ $\boxed{6}$

• Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

(i) $\dim(W + Z) =$ $\boxed{3}$

(ii) Determinare una base di $W \cap Z$: $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\implies$ $\text{rg}(A) =$ $\boxed{2}$ $\dim(Ker(\mathcal{L}_A)) =$ $\boxed{4}$

• $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$ $\boxed{+4}$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow m.g.(2) =$ $\boxed{1}$

• Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = $\boxed{2}$

• Data $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(3, 1)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{-1}$

• Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

21-12-2016

Traccia sol. II parte

(1) $\begin{cases} e^{2z+3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{\bar{z}} \\ |z+3| \leq 4\pi \end{cases}$

1 eq $\Longleftrightarrow$ $\quad 2z+3 = i\frac{\pi}{4} + \bar{z} + 2k\pi i \, , \; k \in \mathbb{Z}$

Posto $z = x+iy$

Re = Re
Im = Im $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} 2x+3 = x \\ 2y = \frac{\pi}{4} - y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

SOL. 1 eq: $\quad z = -3 + i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right) \, , \; k \in \mathbb{Z}$

sostituiamo nella 2 disequazione

$$z+3 = i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right)$$

$$|z+3| = \left| i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right|$$

$$= \underset{1}{\underset{\shortparallel}{|i|}} \cdot \underbrace{\left|\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right|}_{\text{valore assoluto}}$$

CIOE'

$$|z+3| \leq 4\pi \iff \left|\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\right| \leq 4\pi$$

come valore ass.

$$-4\pi \leq \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \leq 4\pi \iff$$

$$\left(-4\pi - \frac{\pi}{12}\right) \cdot \frac{3}{2\pi} \leq k \leq \left(4\pi - \frac{\pi}{12}\right) \cdot \frac{3}{2\pi} \iff$$

$$-\frac{49}{12} \cdot \frac{3}{2} \leq k \leq \frac{47}{12} \cdot \frac{3}{2}$$

OVVERO $-6 \leq k \leq 5$, $\underline{\underline{k \in \mathbb{Z}}}$

2 $A_t = \begin{pmatrix} t & 4 & 0 \\ 0 & t & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

i) $\det(A_t) = 4t^2 - 16$

$\det(A_t) = 0 \iff t = \begin{cases} +2 \\ -2 \end{cases}$

$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ t & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(M) \neq 0 \quad \forall\, t$

CIOE' $\quad t \neq \pm 2 \quad rg = 3 \quad \dim Ker = 0$

$\quad t = +2, -2 \quad rg = 2 \quad \dim Ker = 3-2$

ii)

$t \neq \pm 2 \quad \exists\, !$ SOLUZIONE

$t = 2 \quad \begin{cases} rg(A_t) = 2 \\ rg(A_t \vdots b) = 3 \quad \text{poiché } \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ non $\exists$ SOL.

$t=-2 \qquad b=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot$ I colonne di A

$$\Rightarrow \quad rg(A) = rg(A \,\vdots\, b) = 2$$

$$\Rightarrow \quad \exists \; \infty \text{ SOLUZIONI}$$

&

$$\dim\{\text{SOLUZIONI}\} = 1$$

iii) $t=2$

$$\text{Base Im} = \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Ker} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{SOL: } \begin{array}{l} x_3 = t \\ x_1 = -2t \\ x_2 = t \end{array} \longrightarrow \text{BASE Ker}(\mathcal{L}_{A_t}) = \left\{ \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{LINEARMENTE IND.}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^3 = \text{Ker}(\mathcal{L}_A) \oplus \text{Im}(\mathcal{L}_A)$$

3 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \}$$

A matrice associata ad f

$rg(A) = 1$

tutte le colonne sono multiple di $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

tutte le righe sono multiple di $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$
(coeff. dell'equazione del Ker)

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 5 & -5 & -20 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

4 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 5)^2$$

AUTOVALORI: $\lambda_0 = 0$ m.a. = 2 m.g. = 2

$\lambda_1 = 5$ m.a. = 2 m.g. = 2

A è diagonalizzabile

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_0 = 0$: $V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

AUTOSPAZIO relativo a $\lambda_1 = 5$: $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$