Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2015/2016

Corso di laurea in Ingegneria

Prova scritta del 15/06/2016

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) MARCO (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 4 - 4i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$ $\boxed{4\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

- $z = 4 - 4i$. Scrivere z^{-1} nella rappresentazione cartesiana $z^{-1} =$: $z =$ $\boxed{\frac{4+4i}{32}}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 + 5x_2 - x_3 = 0\} \;,\; Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ ~~vero~~ falso

- Determinare una base di W

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \mathrm{rg}(A) = \boxed{4}$ $\dim(Ker(l_A)) = \boxed{2}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{-4}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile ~~vero~~ falso

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = $\boxed{4}$

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1,3)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{0}$

$\boxed{15-6-2016}$

(1) $\begin{cases} z^3 = -2|z|^2 \\ |z-i| \geq |z| \end{cases}$

I eq: $z = \rho \cdot e^{i\vartheta} \longrightarrow \begin{array}{l} z^3 = \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} \\ |z|^2 = \rho^2 \end{array}$

$-2 = 2 \cdot e^{i\pi}$

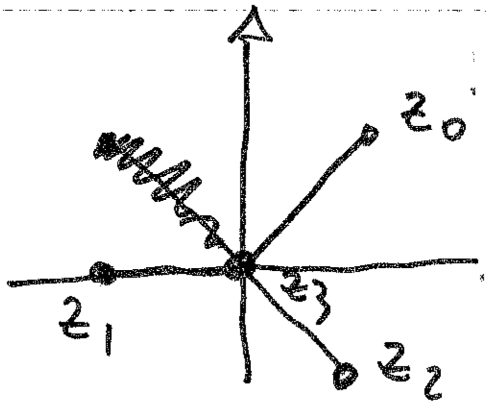
I eq $\Longleftrightarrow \quad \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = 2 \cdot \rho^2 \cdot e^{i\pi}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 2\rho^2 \\ 3\vartheta = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

sol. distinte

$\rho = 0 \quad (\Leftrightarrow z = 0) \qquad \begin{cases} \rho = 2 \\ \vartheta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{3} \end{cases}$

$k = 0, 1, 2$



II: $z = x+iy$

$z-i = x+i(y-1)$

$|z-i| \geq |z| \iff$

$\sqrt{x^2+(y-1)^2} \geq \sqrt{x^2+y^2} \iff$

$-2y+1 \geq 0 \iff y \leq \frac{1}{2}$

x qualsiasi

---

sol. sistema: $z_3 = 0$

$z_1 = -2$

$z_2 = 1-i\sqrt{3}$

② $A_t = \begin{pmatrix} t & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$

i) $\det(A_t) = t^2 - t$

$\det(A_t) = 0 \iff t = 0, 1$

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ he det $\neq 0$ $\forall t \Rightarrow rk \geq 2$ $\forall t$

conclusione: $t \neq 0, 1$ $\quad rk = 3$

$t = 0, 1$ $\quad rk = 2$

ii) $t \neq 0, 1$ $\quad rk(A_t) = 3$

$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\quad rk(A_t \vdots b) \leq 3$ $\Rightarrow$ $\exists!$ soluzione

$t = 0$ $\quad rk(A_t) = 2 = rk(A_t \vdots b)$

$\Rightarrow \exists \infty$ soluzioni

$t=1$ $\quad rk(A_t)=2$

$rk(A_t \vdots b)=3 \Rightarrow$ non $\exists$ sol.

---

iii) $b=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=$ II colonne di A

$\Downarrow$

$\exists$ soluzione

$rk(A)=rk(A \vdots b)=2$

$\Downarrow$

dim{soluzioni} $=1$

$rk(A)=2$ possiamo usare riga 2

riga 3

$$A_t \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3=1 \\ x_2+x_3=1 \end{cases}$$

$x_3 = s$ parametro

$\mathrm{II}: \; x_2 = 1 - s$

$\mathrm{I}: \; 2x_1 = 1 - (1-s) + 5 \cdot s$

$\iff x_1 = 0 + 3s$

SOLUZIONI: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$

(3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$W = \{ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$\mathrm{Im}(f) = W$

$\mathrm{Ker}(f) \subset W$

BASE $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}(f) \subset W$ $\to$ posso scegliere

$\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{l} 1 + a = 0 \\ 1 + b = 0 \\ c = 0 \end{array} \qquad \text{sol.}: A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) =$

$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c}\text{sviluppo r.} \\ \text{colonne 2}\end{array}\right)$

$= (-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$=$ sviluppo risp. colonne 2 $= (-\lambda) \cdot \left[1 \cdot (-2+\lambda) + (2-\lambda)(1-\lambda)^2\right]$

$= (-\lambda)(\lambda-2) \cdot \left((1-\lambda)^2 - 1\right) =$

$= (-\lambda)^2 \cdot (\lambda-2)^2$

$\rightarrow$ AUTOVALORI : $0; 2$

$$m.a.(0) = 2$$
$$m.a.(2) = 2$$

$$m.g.(0) = 4 - rk(A) = 4 - 2 = 2$$

$$m.g.(2) = 4 - rk(A - 2\,Id) = 4 - 3 = 1$$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda = 0$: $= \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : (s,t) \neq (0,0) \right\}$

AUTOVETTORI relativi a $\lambda = 2$: $= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : z \neq 0 \right\}$

A è triangolarizzabile

A non è diagonalizzabile