Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2015/2016

Corso di laurea in Ingegneria ____

Prova scritta del 09/02/2016

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

____	MARCO	____
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 4i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z = \boxed{4 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0\} , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle . \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$$

~~vero~~ X	falso

- Determinare una base di W

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \operatorname{rg}(A) = \boxed{2} \qquad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{4}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-3}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile

~~vero~~ X	falso

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = $\boxed{2}$

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1,3)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{\frac{1}{2}}$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

COMPITO 9-2-2016

Treccia SOL.

① $\begin{cases} z^3 = -|z|^2 \cdot \bar{z} \\ e^z = -e^{\pi} \end{cases}$

I: $z = \rho \cdot e^{i\vartheta} \Rightarrow$ $z^3 = \rho^3 \cdot e^{i3\vartheta}$

$|z|^2 = \rho^2$

$\bar{z} = \rho \cdot e^{-i\vartheta}$

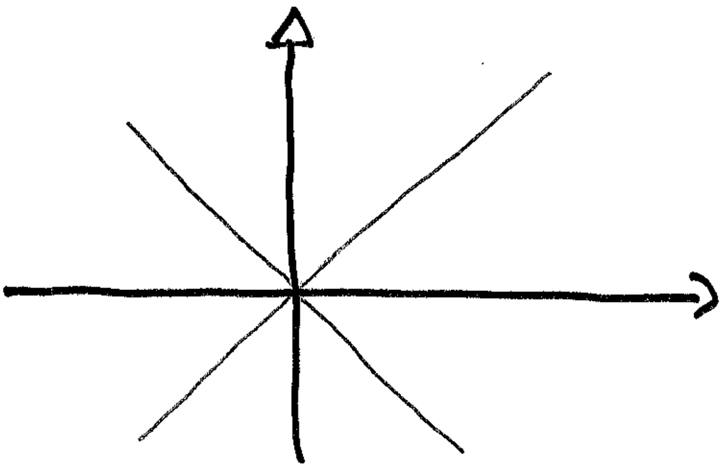
n.b. $-1 = e^{i\pi}$

CIOE' I: $\rho^3 \cdot e^{i3\vartheta} = e^{i\pi} \cdot \rho^2 \cdot \rho \cdot e^{-i\vartheta}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = \rho^3 \\ 3\vartheta = \pi - \vartheta + 2K\pi \end{cases}$

Sol. distinte

$$\begin{cases} \rho \quad \text{qualsiasi} \quad , \rho \in \mathbb{R}^+ \\ \vartheta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} \qquad k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$



$$z_0 = \rho \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z_1 = \rho \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z_2 = \rho \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z_3 = \rho \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right.$$

II: $e^{z} = -e^{\pi}$

$$-e^{\pi} = e^{\pi + i\pi}$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = \pi + i\pi + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

<u>sol. sistema</u>:

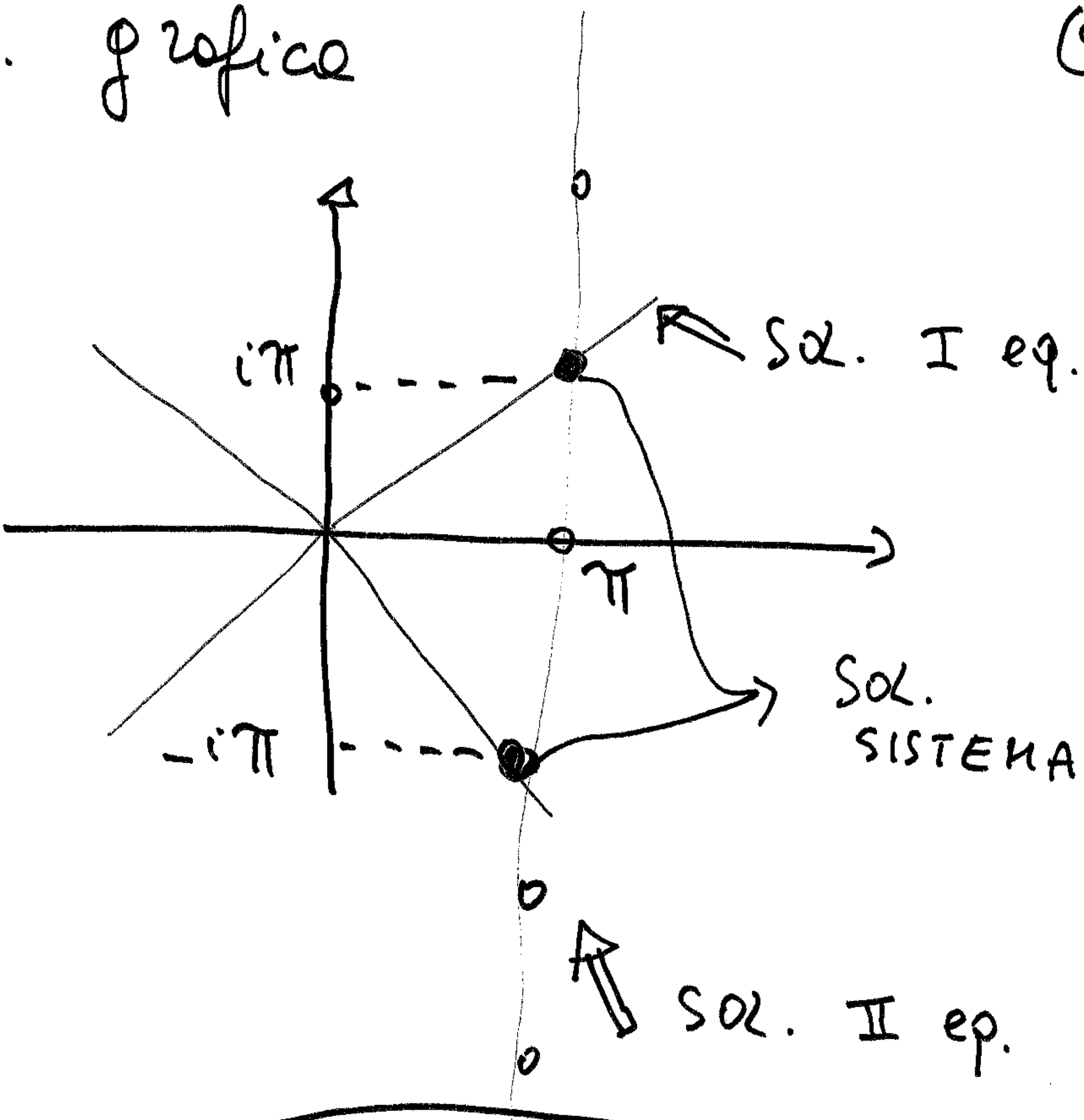
cerco $z = \pi + i\pi + 2k\pi i$

in modo che l'angolo corrispondente sia $\frac{\pi + 2k\pi}{4}$

ovvero se $z = x + iy$

$$\frac{y}{x} = \pm 1 = \begin{matrix} \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{matrix}$$

SOL. grafica



<u>Conclusione</u>. SOL. SISTEMA

$$z_0 = \pi + i\pi$$

$$z_4 = \pi - i\pi$$

2

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 3 & -t \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2t \end{pmatrix}$$

i) $\det(A_t) = -4t^2 + 2t + 6$

$\det = 0 \iff t = -1, \frac{3}{2}$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0 \quad \forall t$

$t \neq -1, +\frac{3}{2} \quad \begin{cases} rg = 3 \\ \dim(Ker) = 0 \end{cases}$

$t = -1, \frac{3}{2} \quad \begin{cases} rg = 2 \\ \dim(Ker) = 3-2=1 \end{cases}$

ii) $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ = colonna 2 di A

$\Rightarrow \forall t \quad rg(A_t) = rg(A_t \,|\, b)$

$\Rightarrow \forall t \quad \exists$ SOLUZIONE

Per $t \neq -1, \frac{3}{2}$ la sol. è unica

Per $t = -1, \frac{3}{2}$ le soluzioni costituiscono uno sp. affine di dim $= 1$

iii) $t=-1$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ \quad\quad 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 \quad\quad + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \dots \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ \quad 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ \quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = t$ parametro

$x_2 = 1 - t$

$x_1 = -2t$

CIOE':

$$\{\text{SOLUZIONI}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Ker} d_A$$

SOL. PARTICOLARE

3 $W = \{ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \} \subset \mathbb{R}^3$

BASE $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

BASE di $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Imponiamo

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

perché in questo modo $f(W) = W$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ perché $r_f = 2$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusione:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

④ ⑨

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda \cdot (\lambda - 2)^2$$

AUTOVALORI : $\lambda_0 = 0$ m.a. $= 1$ m.g. $= 1$

$\lambda_1 = 2$ m.a. $= 2$ m.g. $= 1$

AUTOVETTORI:

$$V_0 = \mathrm{Ker}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V_1 = \mathrm{Ker}(A - 2\,\mathrm{Id}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

A è triang.^{le}

A non è diag.^{le}