Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2014/2015
Prova scritta del 29/1/2015
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) | MARCO (Nome) | (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 1 + \sqrt{3}i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \varrho \cdot e^{i\vartheta}$: $z = \boxed{2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}}$

- $z = 1 + \sqrt{3}i \implies z^3 = \boxed{-8}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \implies \dim(W+Z) = \boxed{3}$$

Determinare una base di $W \cap Z$:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{rg}(A) = \boxed{3} \quad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{3}$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{6}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all' autovalore $\lambda = 3$ per l'app. lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}}$

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \implies m.g.(5) = \boxed{1}$

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto $(1,2)$ della matrice A^{-1} : $\boxed{-\frac{3}{2}}$

29 - 1 - 2015

(1) $\begin{cases} e^{2z} = -5 \cdot e^{\bar{z}} \\ |z - \log(5)| \leq 5\pi \end{cases}$

I eq: $-5 = e^{\log(5) + i\pi}$

$\Rightarrow$ I eq. $\Leftrightarrow$ $e^{2z} = e^{\log(5) + i\pi + \bar{z}}$

$\Leftrightarrow$ $2z = \log(5) + i\pi + \bar{z} + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$

Posto $z = x + iy$ si ha

$\begin{cases} Re = Re \\ Im = Im \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \log(5) + x \\ 2y = \pi - y + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $x = \log(5)$

$y = \dfrac{\pi + 2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$

Sol. I eq: $z = \log(5) + i\,\dfrac{\pi + 2k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$

Sostituiamo in II:

$$\left| z - \log(5) \right| = \left| i \, \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right|$$

$$= \left| \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right| \leq 5\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\iff$

$$-5\pi \leq \frac{\pi + 2k\pi}{3} \leq 5\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \quad -15\pi \leq \pi + 2k\pi \leq 15\pi$$

$$-16 \leq 2k \leq 14$$

$$-8 \leq k \leq 7 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

SOLUZIONE SISTEMA: $z = \log(5) + i \, \dfrac{\pi + 2k\pi}{3}$

$$-8 \leq k \leq 7 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

2 $A_t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ t & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -t \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

i)

A_t matrice 4×3

eliminiamo riga 3: $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ t & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(M) = 2t - 6 = 0 \iff t = 3$

Quindi per $t \neq 3$ $\det(M) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} rk(A_t) = 3 \\ \dim(Ker) = 0 \end{cases}$

Per $t=3$: $A_{t=3}$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

III col. = I + 2 · II

I, II lin. IND. $\Rightarrow \begin{cases} rk(A_{t=3}) = 2 \\ \dim(Ker) = 3 - 2 = 1 \end{cases}$

ii) $$(A_t \vdots b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ t & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & t & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad 4\times 4$$

$$\det(A_t : b) = -t^2 + 4t - 3$$

RADICI: 1, 3

Quindi per $t \neq 1, 3$

$\det(A_t : b) \neq 0 \Rightarrow$

$rk(A_t \vdots b) = 4 > 3 \geq rk(A_t)$

$\Rightarrow$ NON $\exists$ SOL. SISTEMA

Per $t = 3$ $\quad rk(A_t) = 2 < rk(A_t \vdots b) = 3$

$\Rightarrow$ NON $\exists$ SOL.

Per $t = 1$ $\quad rk(A_t) = 3 = rk(A_t \vdots b)$

$\Rightarrow \exists$ SOL.

iii) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\dim(W) = 1$

$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^4 = \mathrm{Im}(f_t) \oplus W \iff \begin{cases} \dim(\mathrm{Im}(f_t)) = 3 \\ W \cap \mathrm{Im}(f_t) = \{0_V\} \end{cases}$

$\dim(\mathrm{Im}(f_t)) = 3 \iff t \neq 3$

$W \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_V\} \iff \det\left(A_t \,\vdots\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right) \neq 0$

$\iff t \neq 3$

---

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad f^2 = 0$

$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -2 & -2\alpha \end{pmatrix}$ poiché $\mathrm{rk}(A) = 1$

$f^2 = 0 \iff A^2 = 0 \iff \alpha = \frac{1}{2}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 2)^4$$

autovalori : $\lambda = 2$ $\quad m.a. = 4$

$$m.g.(2) = \dim(\mathrm{Ker}(A - 2\,Id))$$

$$A - 2\,Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk = 2 \Rightarrow m.g. = 4 - 2 = 2$

Autospazio $= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

A è triang.^{le}

A non è diag.^{le} perchè $m.a.(\cancel{4}\,2) = 4 > \underset{m.g.(2)}{\underset{\shortparallel}{2}}$