Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2014/2015
Prova scritta del 13/1/2015
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

	MARCO	
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

• $z = -1 + i \implies z^3 =$ $\boxed{2 + i2}$ • $z = 5 - i$, $w = 1 + 3i \implies Re(z \cdot w) =$ $\boxed{8}$

• Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\} , Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ vero ~~falso~~

Determinare una base di W:

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies rk(A) =$ $\boxed{3}$

• $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$ $\boxed{-4}$

• $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile ~~vero~~ falso

• Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ è autovettore relativo all' autovalore $\lambda = 2$ per l'app. lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se $f \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} =$ $\boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}}$

• $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \implies m.g.(5) =$ $\boxed{2}$

• $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

① $\begin{cases} (z+1)^4 = -64 \\ e^{i\pi z} = -e^{\pi} \end{cases}$

I: $z+1 = w$ $\qquad w^4 = -64$

$w = \rho \cdot e^{i\vartheta} \rightarrow \qquad \rho^4 \cdot e^{i4\vartheta} = 64 \cdot e^{i\pi}$

$$w = \begin{cases} \rho = 2\sqrt{2} \\ \vartheta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$z = w - 1 \Rightarrow$

$z_0 = 1 + 2i$

$z_1 = -3 + 2i$

$z_2 = -3 - 2i$

$z_3 = 1 - 2i$

II: $e^{i\pi z} = -e^{\pi} = e^{\pi + i\pi}$

$\Leftrightarrow \quad i\pi z = \pi + i\pi + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \quad z = (1+2k) - i \quad , k \in \mathbb{Z}$

CONCLUSIONE: NON $\nexists$ SOLUZIONI

2 $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & t & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

i) $\det(A_t) = 3t^2 - 4t - 4$

$\det = 0 \iff t = \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$

$\Rightarrow \quad t \neq 2, -\frac{2}{3} \qquad \begin{cases} rk = 3 \\ \dim(\ker) = 0 \end{cases}$

$t = 2, -\frac{2}{3} \qquad \begin{cases} rk = 2 \\ \dim(\ker) = 1 \end{cases}$

ii) $A_t X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$t \neq 2, -\frac{2}{3} \quad \exists!$ sol.

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$ I colonne $\Rightarrow \quad t = 2, -\frac{2}{3}$

$\exists \infty$ SOL.

iii) Dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ \quad\ \ 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Sol. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

---

3 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cerchiamo $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L}_A)$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v = t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi possiamo scegliere $B = (v, v, v)$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

④ $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ④

$P_A(\lambda) = \lambda^4$

autovalori: $\lambda = 0$ $\quad m.a.(0) = 4$

$m.g.(0) = 4 - rk(A) = 4-3 = 1$

AUTOSPAZIO : $\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

A è triang.^{le}

A non è diag.^{le} poichè $m.a(0) \neq m.g.(0)$

(n.b. A è NILPOTENTE)