Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 19/12/2012
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i \implies z^4 = \boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:
$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \ .$$
Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | falso |

  Determinare una base di $W \cap Z$:

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{} \qquad \mathrm{rg}(A) = \boxed{}$$

- $$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)
$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+i)^2 = 4i \cdot (\overline{z} - i) \\ |z-1| \leq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & t \\ 0 & t & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]
Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \; ; \quad ker(f) \subset Im(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è diagonalizzabile.

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 19/12/2012

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = 2 + 2i \quad \Longrightarrow \quad z^4 =$ $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

  $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \}$, $Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$. Allora $\mathbb{R}^3 = W + Z$ | vero | falso |

  Determinare una base di $W \cap Z$:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim(Ker(l_A)) = \boxed{} \qquad \mathrm{rg}(A) = \boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

  $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+i)^2 = 6i \cdot (\overline{z} - i) \\ |z-2| \geq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 9 & 1 & t \\ 0 & t & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]
Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ ; \quad ker(f) \subset Im(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è diagonalizzabile.

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 19/12/2012

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \implies z^4 =$ $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

  $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 - x_2 + x_3 = 0 \}$, $Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$. Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | falso |

  Determinare una base di $W \cap Z$:

  $\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) =$ $\boxed{}$ $\quad \mathrm{rg}(A) =$ $\boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

  $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+i)^2 = 2i \cdot (\overline{z} - i) \\ |z+1| \leq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & t \\ 0 & t & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]
Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \; ; \quad ker(f) \subset Im(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è diagonalizzabile.

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 19/12/2012

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = -\sqrt{5} - \sqrt{5}i \implies z^4 =$ $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

  $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$, $Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Allora $\mathbb{R}^3 = W + Z$ | vero | falso |

  Determinare una base di $W \cap Z$:

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) =$ $\boxed{}$ $\text{rg}(A) =$ $\boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]

Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+i)^2 = 8i \cdot (\overline{z} - i) \\ |z+2| \geq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 4 & -1 & t \\ 0 & t & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]

Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ ; \quad ker(f) \subset Im(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A.

(iii) Dire se A è diagonalizzabile.

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 19/12/2012
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i \implies z^4 = \boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

  $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \rangle$. Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | falso |

  Determinare una base di $W \cap Z$:

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \boxed{}$ $\quad \mathrm{rg}(A) = \boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

  $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+i)^2 = 2i \cdot (\overline{z} - i) \\ |z-4| \leq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ 0 & t & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\quad A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $\quad W = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]
Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ ; \quad ker(f) \subset Im(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è diagonalizzabile.

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 19/12/2012
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = -2-2i \quad \Longrightarrow \quad z^4 =$ $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

  $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_1+x_2+x_3 = 0\}$, $Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$. Allora $\mathbb{R}^3 = W + Z$ | vero | falso |

  Determinare una base di $W \cap Z$:

- $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dim(Ker(l_A)) =$ $\boxed{}$ $\quad \mathrm{rg}(A) =$ $\boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

  $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+i)^2 = 6i \cdot (\overline{z} - i) \\ |z+4| \geq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 5 & -1 & t \\ 0 & t & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]
Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle ; \quad ker(f) \subset Im(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è diagonalizzabile.

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 19/12/2012

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \implies z^4 =$ $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

  $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$, $Z = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle$. Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | falso |

  Determinare una base di $W \cap Z$:

- $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) =$ $\boxed{}$ $\quad \mathrm{rg}(A) =$ $\boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

  $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+i)^2 = 2i \cdot (\overline{z} - i) \\ |z+4| \geq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & t \\ 0 & t & -8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]
Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ ; \quad ker(f) \subset Im(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è diagonalizzabile.

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2012/2013

Prova scritta del 19/12/2012

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = \sqrt{5} - \sqrt{5}i \implies z^4 =$ $\boxed{}$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:
  $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$, $Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. Allora $\mathbb{R}^3 = W + Z$ | vero | falso |

  Determinare una base di $W \cap Z$:

- $A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) =$ $\boxed{}$ $\mathrm{rg}(A) =$ $\boxed{}$

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\boxed{}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z+i)^2 = 8i \cdot (\overline{z} - i) \\ |z+6| \leq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & t \\ 0 & t & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]
Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \ ; \quad ker(f) \subset Im(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è diagonalizzabile.