

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^2 = -\bar{z}^2 \\ e^z = e^{2\pi} \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t \\ t & -1 & 2 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(\text{Im}(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 , $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(f_t) \oplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-4] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$\text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad f^2 = 0$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6] Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A .

(iii) Dire se A è diagonalizzabile