

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z + 3i)^3 = -8i \\ |z - 1| \leq |z| \end{cases}$$

• **Esercizio 2.** [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & t & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(\text{Im}(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = 1$, determinare un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = W \oplus (\text{Im}(\mathcal{L}_{A_1}))$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-4] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che

$$\text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad \text{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6] Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A .

(iii) Dire se A è diagonalizzabile