Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2011/2012

Prova scritta del 18/01/2012
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 1 + i$. Scrivere nella forma cartesiana z^{-1} :

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \, , \, Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \, . \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$$

vero | falso

- Dato W il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \quad \text{determinare una base di } W:$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) = \qquad \mathrm{rg}(A) =$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile vero | falso

- A matrice 3×3, $\det(A) = 0 \implies 0$ è autovalore di$A$ vero | falso

- $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 1 è =

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies A^2 = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-5] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^6 = 4 \cdot \overline{z}^2 \\ e^{\pi z} = -\frac{1}{e^{\pi}} \end{cases}$$

• **Esercizio 2. [punteggio: 0-6]**

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & t \\ 2 & -3 & t \\ -3 & t & 2 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $\quad A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $\quad W = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3 [punteggio: 0-4] Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i) Si determini $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$.
ii) Dimostrare che f è bigettiva

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) dimostrare che A non è diagonalizzabile
(iv) dimostrare che A^2 è diagonalizzabile