

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z - i)^2 = -(\bar{z} + i)^2 \\ |e^z| = e \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} (1-t) & 0 & -1 \\ t & 0 & t \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(\text{Im}(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$, determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = W \oplus \text{Im}(\mathcal{L}_{A_t})$

Esercizio 3 [punteggio: 0-3] Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}, \quad Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

i) Si indichi un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\text{Ker}(f) = W$, $\text{Im}(f) = Z$.

ii) Si determini $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A .

(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z - i)^2 = -(\bar{z} + i)^2 \\ |e^z| = \frac{1}{e} \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} (1-t) & 0 & -1 \\ t & 0 & t \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(\text{Im}(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$, determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = W \oplus \text{Im}(\mathcal{L}_{A_t})$

Esercizio 3 [punteggio: 0-3] Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \right\}, \quad Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

i) Si indichi un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\text{Ker}(f) = W$, $\text{Im}(f) = Z$.

ii) Si determini $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A .

(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.