

Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2015/2016

Corso di laurea in Ingegneria

Prova scritta del 09/02/2016

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 4i$. Scrivere z nella rappresentazione trigonometrica $z = \rho \cdot e^{i\vartheta}$: $z =$

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}, Z = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle. \text{ Allora } \mathbb{R}^3 = W \oplus Z \quad \boxed{\text{vero}} \quad \boxed{\text{falso}}$$

- Determinare una base di W

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) =$ $\dim(\text{Ker}(l_A)) =$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A$ è diagonalizzabile

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione =

- Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ determinare il coefficiente di posto (1,3) della matrice A^{-1} :

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineare. Sapendo che $f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, allora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^3 = -|z|^2 \cdot \bar{z} \\ e^z = -e^\pi \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 3 & -t \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2t \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(\text{Ker}(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(\text{Im}(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Posto $t = -1$ determinare tutte le soluzioni del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3 [punteggio: 0-3] Si consideri il seguente sottospazio di \mathbb{R}^3 :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

i) Si indichi un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(W) \subseteq W$, $\text{rg}(f) = 2$.

ii) Si determini $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A .

(iii) Si dica se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.