Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2013/2014

Prova scritta del 19/02/2014
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = \sqrt{3} + i$. Scrivere nella forma cartesiana z^3 :

- Sia $z = -3$. Scrivere z nella forma trigonometrica $\varrho \cdot e^{i\theta}$:

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \ , \ Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_2 + x_3 = 0\} \ .$$

(i) Allora $\mathbb{R}^3 = W + Z$ | vero | falso |

(ii) Determinare una base di $W \cap Z$:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) =$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(A) =$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 2 è =

- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A \cdot B = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-5] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 = \overline{z}^4 \\ |e^z| = e^{\pi} \end{cases}$$

• **Esercizio 2. [punteggio: 0-6]**

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & t & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Post $t = 2$, determinare tutte le soluzioni del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \; ; \quad Im(f) \subset ker(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2013/2014

Prova scritta del 19/02/2014
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$. Scrivere nella forma cartesiana z^3 :

- Sia $z = -4i$. Scrivere z nella forma trigonometrica $\varrho \cdot e^{i\theta}$:

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \ , \ Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_2 + x_3 = 0\} \ .$$

(i) Allora $\mathbb{R}^3 = W + Z$ | vero | falso |

(ii) Determinare una base di $W \cap Z$:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) =$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(A) =$

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 3 è =

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A \cdot B = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-5] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 = \overline{z}^4 \\ |e^z| = \frac{1}{e} \end{cases}$$

• **Esercizio 2. [punteggio: 0-6]**

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(iii) Post $t = -2$, determinare tutte le soluzioni del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \; ; \quad Im(f) \subset ker(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A.

(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2013/2014

Prova scritta del 19/02/2014
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = \sqrt{3} - i$. Scrivere nella forma cartesiana z^3 :

- Sia $z = -4$. Scrivere z nella forma trigonometrica $\varrho \cdot e^{i\theta}$:

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} \ , \ Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_2 + x_3 = 0\} \ .$$

(i) Allora $\mathbb{R}^3 = W + Z$ | vero | falso |

(ii) Determinare una base di $W \cap Z$:

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) =$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(A) =$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \implies$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 5 è =

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A \cdot B = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-5] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 = \overline{z}^4 \\ |e^z| = e^{\pi} \end{cases}$$

• **Esercizio 2. [punteggio: 0-6]**

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & t & 0 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Post $t = 2$, determinare tutte le soluzioni del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \; ; \quad Im(f) \subset ker(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A.

(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2013/2014

Prova scritta del 19/02/2014
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = -1 + i\sqrt{3}$. Scrivere nella forma cartesiana z^3 :

- Sia $z = 5i$. Scrivere z nella forma trigonometrica $\varrho \cdot e^{i\theta}$:

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \right\},\ Z = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

(i) Allora $\mathbb{R}^3 = W + Z$ | vero | falso |

(ii) Determinare una base di $W \cap Z$:

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim(Ker(l_A)) =$ $\qquad$ $\mathrm{rg}(A) =$

- $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 6 è =

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-5] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 = \overline{z}^4 \\ |e^z| = \frac{1}{e} \end{cases}$$

• **Esercizio 2. [punteggio: 0-6]**

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(iii) Post $t = -2$, determinare tutte le soluzioni del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. [punteggio: 0-3] Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \; ; \quad Im(f) \subset ker(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di A.

(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile