Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2013/2014

Prova scritta del 30/01/2014

TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1

calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- Sia $z = -1 + i$. Scrivere nella forma cartesiana z^3 :

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \ , \ Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle . \quad \text{Allora} \quad \mathbb{R}^3 = W + Z$$

vero	falso

- Dato W il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\} \ \text{determinare una base di } W:$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \quad \dim(Ker(l_A)) = \qquad \text{rg}(A) =$

- $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile

vero	falso

- Il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore dell'applicazione lineare associata alla matrice (barrare la matrice giusta)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies$ la molteplicità geometrica dell' autovalore 1 è =

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \implies \quad A^2 = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-5] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^6 = -729\pi^6 \\ e^z = -1 \end{cases}$$

• **Esercizio 2. [punteggio: 0-6]**

Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, $W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^4 = (Im(\mathcal{L}_{A_t})) \bigoplus W$.

Esercizio 3 **[punteggio: 0-4]** Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \; f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \; f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i) Si determini $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tale che $f = \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$.
ii) Dire se f è bigettiva

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]

Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Dire se A è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile