Corso di laurea in Ingegneria Gestionale/ Chimica
Esame di ALGEBRA LINEARE - anno accademico 2013/2014

Prova scritta del 20/12/2013
TEMPO A DISPOSIZIONE: 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : risposta mancante = 0 ; risposta esatta = +1 risposta sbagliata = -1
calcoli e spiegazioni non sono richiesti

- $z = -\sqrt{3} - i \implies z^3 =$ ☐ ; $z^{-1} =$ ☐

- Dati W e Z i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

  $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; : \; x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, $Z = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$. Allora $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus Z$ | vero | falso |

  Determinare una base di $W \cap Z$:

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies \dim(Ker(l_A)) =$ ☐ $\mathrm{rg}(A) =$ ☐

- Le soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituiscono uno spazio affine di dimensione = ☐

- $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ ☐

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A$ è diagonalizzabile | vero | falso |

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

SECONDA PARTE

I risultati devono essere giustificati attraverso calcoli e spiegazioni

Esercizio 1. [punteggio: 0-6]
Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} (z-3i)^3 = 2\cdot(3i-\overline{z}) \\ |z-6i| \leq |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. [punteggio: 0-6]
Al variare del parametro reale t sia $\mathcal{L}_{A_t}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & t \\ t & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

i) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, $\dim(Ker(\mathcal{L}_{A_t}))$ e $\dim(Im(\mathcal{L}_{A_t}))$.

ii) Determinare i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste almeno una soluzione del sistema $A_t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Im(f_t) \bigoplus W$.

Esercizio 3. [punteggio: 0-3]
Determinare un'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$Im(f) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle \ ; \quad ker(f) = Im(f)$$

Si determini una matrice $A \in \mathcal{M}at(2\times 2;\mathbb{R})$ tale che $f = \mathcal{L}_A$.

Esercizio 4. [punteggio: 0-6]
Si consideri la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di A specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Si determinino gli autovettori di A.
(iii) Determinare una base di $Ker(\mathcal{L}_A) \cap Im(\mathcal{L}_A)$.