Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra Lineare e Analisi 2 - anno accademico 2008/2009

prova scritta del 13/6/2008
TEMPO A DISPOSIZIONE: 180 minuti (45 minuti per ogni parte)

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

PRIMA PARTE

Esercizio 1.1 [punteggio: 0-3]

Scrivere nella forma $z = x + iy$ il seguente numero complesso: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9$

Esercizio 1.2 [punteggio: 0-5]

Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{(\pi z)} = -e^{\pi} \\ z^5 + 4z = 0 \end{cases}$$

SECONDA PARTE

Esercizio 2.1 [punteggio: 0-6]

Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_1 & & +tx_3 \\ tx_1 & +x_2 & +4x_3 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii) Dato il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$: $Z = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x_1 + 5x_3 = 0\}$;

determinare per quali valori di t si ha $\mathbb{R}^3 = Z \bigoplus Ker(f_t)$

Esercizio 2.2 [punteggio: 0-2]

Determinare la matrice A, associata rispetto alle basi canoniche all' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

TERZA PARTE

Esercizio 3.1 [punteggio: 0-5]
Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

(iii) Si dica se f è triangolarizzabile e/o diagonalizzabile.

Esercizio 3.2 [punteggio: 0-3]
Data la forma $\mathrm{f}_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathrm{f}_t\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = (y_1 \ \ y_2 \ \ y_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & t & t \\ t & 1 & 2 \\ t & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Determinare per quali valori del parametro t f_t è un prodotto scalare definito positivo.

QUARTA PARTE

Esercizio 4.1 [punteggio: 0-5]
Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

(i) Determinare i punti stazionari per f, specificando quali sono i punti di max e min relativo per f.

(ii) Determinare i valori max, min di $f(x, y)$ ristretta al dominio $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 3 - x \right\}$

Esercizio 4.2 [punteggio: 0-3] Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = 2 + \sin(xy) + e^x$$

(i) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 in un intorno di $(0, 0)$ della funzione

(ii) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 0, f(0, 0))$