Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2005/2006

prova scritta del 14-2-2006

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{2z} = (2+i2\sqrt{3}) \cdot e^{-4\overline{z}} \\ |z+i\frac{\pi}{3}| > |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 3x_2 & +3x_3 \\ x_1 & & +2x_3 \\ x_1 & & +2x_3 \\ & -x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

(i) Si determini una base di $Ker(f)$ e una di $Im(f)$.

(ii) Si determini, per quali valori del parametro reale t esiste almeno una soluzione del sistema

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$$

(iii) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ : \ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

Determinare la dimensione di $W \cap (Im(f))$ e di $W + (Im(f))$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

(iii) Determinare per quali valori del parametro β la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.