Ingegneria Gestionale - Corso di Algebra - anno accademico 2004/2005

prova scritta del 5-7 -2005

Esercizio 1.

i) Rappresentare nella forma trigonometrica il numero complesso $-3 - i3\sqrt{3}$

ii) Si rappresenti nel piano di Gauss l' insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z + 8i| > |z|\}$

iii) Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{2\overline{z}} = (-3 - i3\sqrt{3}) \cdot e^{z} \\ |z + 8i| > |z| \end{cases}$$

Esercizio 2. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +x_2 & +x_3 \\ tx_1 & +2x_2 & \\ x_1 & +tx_2 & +x_3 \\ x_1 & +x_2 & +tx_3 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare del parametro reale t si determini la dimensione di $Ker(f_t)$ e la dimensione di $Im(f_t)$.

(ii) Determinare per quali valori di t esiste almeno una soluzione del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Per i valori di t tali che esiste una soluzione, determinare tutte le soluzioni del sistema.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino gli autovettori di f.

(iii) Determinare, se esiste, un vettore $v \in Ker(f^2)$ t.c. $v \notin Ker(f)$