

**Esercizio 1.** Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} e^{2z} + e^{z+1} - e^z - e = 0 \\ -\pi \leq \operatorname{Im}(z) \leq \pi \end{cases}$$

**Esercizio 2.** Al variare del parametro reale  $\beta$  sia  $f_\beta : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \beta & (\beta - 1) & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di  $\beta \in \mathbf{R}$  determinare la dimensione di  $\ker(f_\beta)$  e  $\operatorname{Im}(f_\beta)$ .

(ii) Per i valori di  $\beta$  per cui  $f$  non è iniettiva si determinino gli autovalori di  $f_\beta$ .

(iii) Determinare, se esistono, i valori di  $\beta$  per i quali  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  è autovettore di  $f_\beta$ .

(iv) **[Ingegneria Informatica]** Per  $\beta = -1$  determinare la forma canonica di Jordan di  $f$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + w \\ x + w \\ 2z + 4w \\ z + 2w \end{pmatrix}$$

(i) Determinare  $\dim(\operatorname{Im}(f))$ ,  $\dim(\operatorname{Ker}(f))$ .

(ii) Dire se il seguente sistema ammette almeno una soluzione

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Dire se il seguente sistema ammette un'unica soluzione

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 4.**[Ingegneria Informatica] Si determini il numero di soluzioni intere positive  $\leq 819$  del sistema

$$\begin{cases} x^3 \equiv 13 \pmod{21} \\ (x, 39) = 13 \end{cases}$$

**Esercizio 5.**[Ingegneria Informatica] Sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  il seguente prodotto scalare

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - 4x_2y_2 - 2x_3y_3$$

- i) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.
- ii) Dire se tale prodotto scalare è definito.
- iii) Esiste un vettore  $v$  tale che  $\langle v, v \rangle = 1$  ?