

Esame di Geometria e Algebra
Ingegneria Informatica
prova scritta del 20-9-1999

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni intere del sistema

$$\begin{cases} 2^x \equiv 3 \pmod{29} \\ 3^x \equiv 2 \pmod{23} \end{cases}$$

Esercizio 2. Si risolva nel campo complesso l'equazione

$$z^2 - \bar{z}^4 = 0$$

Esercizio 3. Si determini il numero degli interi positivi x che verificano:

$$\text{M.C.D.}(x^2, 3600) = \text{m.c.m.}(x, 45)$$

Esercizio 4. Al variare del parametro reale β , sia $f_\beta : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 5 & 1 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $\beta \in \mathbf{R}$, $\dim(\text{Ker}(f_\beta))$ e $\dim(\text{Im}(f_\beta))$.

(ii) Determinare, se esistono, i valori di $\beta \in \mathbf{R}$ per cui il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

è autovettore per f_β .

(iii) Sia β fissato. Determinare la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore β .

Esercizio 5. Sia $V = \mathbf{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale su \mathbf{R} dei polinomi di grado ≤ 2 e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ l'applicazione definita da

$$\langle f, g \rangle = (f \cdot g)'(1)$$

(i) Dimostrare che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare.

(ii) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.

(iii) Dire se tale prodotto scalare è definito o indefinito.