

Esame di Geometria e Algebra
Ingegneria Informatica
prova scritta del 2-2-1999

Esercizio 1. Si determini il numero degli interi positivi $x \leq 1515$ che verificano

$$x^7 - x^4 - x^3 + 1 \equiv 0 \pmod{505}$$

Esercizio 2. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} e^{\pi \cdot z} = -e^{\pi} \\ |z - 1| \leq 3 \end{cases}$$

Esercizio 3. Si determinino le permutazioni $\sigma \in \mathcal{S}_6$ tali che

$$\begin{cases} \sigma^4 \neq \mathbf{id} \\ \sum_{i=1}^6 |i - \sigma(i)| \leq 6 \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - w \\ y \\ 2x + z \\ x \end{pmatrix}$$

Determinare gli autovettori di f e la forma canonica di Jordan di f .

Esercizio 5. Dato $V = \mathcal{M}(3 \times 3; \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 a coefficienti in \mathbf{R} , si considerino i sottospazi vettoriali

$$H = \{A \in V \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sono autovettori di } A\}$$

$$K = \{A \in V \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sono autovettori di } A\}$$

- (i) Determinare $\dim H$, $\dim K$.
- (ii) Dimostrare che ogni $A \in H \cap K$ è diagonale.
- (iii) Determinare $\dim(H + K)$.