Esame di Geometria e Algebra
Ingegneria Informatica
prova scritta del 1-6-1999

Esercizio 1. Si determinino le soluzioni intere del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2^x \equiv 7 & (mod\ 19) \\ x^2 - x \equiv 0 & (mod\ 6) \end{cases}$$

Esercizio 2. Si risolva nel campo complesso il sistema

$$\begin{cases} (\overline{z} - 1)^5 = z - 1 \\ |e^z| \leq e \end{cases}$$

Esercizio 3. Si determini il numero degli interi positivi $x \leq 33000$ che verificano

$$\text{M.C.D.}(x, 1320) = \text{M.C.D.}(x, 5500)$$

Esercizio 4. Al variare del parametro reale β, si consideri la matrice A in $\mathcal{M}(4 \times 4; \mathbf{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \beta & 2 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

In funzione del parametro reale β:
i) determinare gli autovalori di A;
ii) determinare il rango di A;
iii) dire quando A è triangolarizzabile e quando è diagonalizzabile.

Esercizio 5. Sia $\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ il seguente prodotto scalare

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_3 + 2x_3 y_2$$

i) Dimostrare che tale prodotto scalare è degenere.
ii) Trovare un vettore $X \in \mathbf{R}^3$ tale che $\langle X, Y \rangle = 0$ per ogni $Y \in \mathbf{R}^3$.
iii) Trovare una base ortogonale per $\langle\ ,\ \rangle$.