Corso di Geometria e Algebra
Ingegneria Gestionale
ALGEBRA LINEARE

Esercizio 1. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2z \\ y \\ -2x-z \\ 2y+w \end{pmatrix}$$

Determinare gli autovettori di f.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2z \\ y \\ -2x-z \\ 2y+w \end{pmatrix}$$

Determinare $\dim(Ker(f))$ e $\dim(Im(f))$ e determinare gli autovettori di f.

Esercizio 3. Al variare del parametro reale β, sia $f_\beta : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 5 & 1 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $\beta \in \mathbf{R}$, $\dim(Ker(f_\beta))$ e $\dim(Im(f_\beta))$.

(ii) Determinare, se esistono, i valori di $\beta \in \mathbf{R}$ per cui il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore per f_β.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-w \\ y \\ 2x+z \\ x \end{pmatrix}$$

Determinare gli autovettori di f.

Esercizio 5. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & t \\ 3 & -3 & 6 \\ t & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbf{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.
Per i valori di t per cui $Ker(f_t) \neq \{0\}$:
(ii) si determini una base di $Ker(f_t)$ e una base di $Im(f_t)$;

Esercizio 6. Al variare del parametro reale t sia $f_t : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbf{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.

Per i valori di t per cui $Ker(f_t) \neq \{0\}$:
(ii) si determini una base di $Ker(f_t)$;
(iii) si dica se f_t è diagonalizzabile.

Esercizio 7. Sia $f_t : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ t & t & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare, al variare di $t \in \mathbf{R}$, $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$.
(ii) Per i valori di t per cui $Ker(f_t) \neq \{0\}$ si determini una base del nucleo di f_t e una base dell'immagine di f_t.
(iii) Determinare, se esistono, i valori di $t \in \mathbf{R}$ per cui il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore per f_t.

Esercizio 8. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare gli autovalori e gli autovettori di f.
(ii) Dimostrare che $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker} f \bigoplus \mathrm{Im} f$.

Esercizio 9. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - 2z \\ 2x - 2z \\ 2x - y - z \end{pmatrix}$$

Determinare
La dimensione del nucleo e dell'immagine di f.
Una base del nucleo di f.
Una base dell'immagine di f.