Ultrafiltri e Metodi Nonstandard

2023/2024 – Primo semestre [1]

Docente: Mauro Di Nasso

Questo corso è focalizzato sulla *teoria aritmetica di Ramsey* e sulle *proprietà combinatorie degli insiemi di interi*. I due strumenti fondamentali che verranno utilizzati per dimostrare quei risultati sono quelli che danno il titolo al corso: *ultrafiltri* e metodi dell'*analisi nonstandard*. Si tratta di due tecniche originate dalla *logica matematica*: gli ultrafiltri sono oggetti fondamentali della combinatoria infinita studiata all'interno della teoria degli insiemi; mentre l'analisi nonstandard è stata elaborata all'interno della teoria dei modelli. Vedremo che quei due strumenti sono in realtà strettamente collegati, e possono essere visti come due facce della stessa tecnica.

Nel corso dimostreremo risultati fondamentali in questo ambito della combinatoria, e cioè il *Teorema di Ramsey*, il *Teorema di Hindman*, il *Teorema di van der Waerden*, il *Teorema di Rado*, il *Teorema di Jin*, e loro principali conseguenze. Verranno inoltre presentati gli aspetti di base della *dinamica topologica discreta* sui numeri naturali nonstandard, e le sue applicazioni in combinatoria e teoria di Ramsey. Infine, verranno presentati alcuni argomenti alla frontiera della ricerca. Infatti, lo scopo principale di questo corso è quello di fornire una competenza tecnica sufficiente per poter affrontare anche problemi aperti.

A titolo di esempio, enunciamo alcuni dei risultati che saranno dimostrati nel corso.

- *Teorema di Hindman.* Per ogni colorazione finita dei numeri naturali $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ esiste una sequenza crescente (a_n) tale che l'insieme delle sue somme finite $\mathrm{FS}(a_n) = \left\{\sum_{i \in F} a_i \mid \emptyset \neq F \subset \mathbb{N} \text{ finito}\right\}$ è monocromatico, cioè esiste un colore C_i con $\mathrm{FS}(a_n) \subseteq C_i$.[2]

- *Teorema di van der Waerden.* In ogni colorazione finita dei naturali esistono progressioni aritmetiche monocromatiche arbitrariamente lunghe.

[1] Codice: 230AA; **CFU**: 6; Lunghezza del corso: 42 ore;
Sito web: `https://people.dm.unipi.it/dinasso/ultra-23.html`.

[2] Per avere un'idea della difficoltà di ottenere una simile proprietà, potete provare a dimostrare la versione ridotta dove si considerano solo due elementi. "Per ogni colorazione finita dei numeri naturali esiste una tripla monocromatica del tipo $a, b, a+b$". (Questo risultato, noto come *Teorema di Schur*, risale al 1918).

- *Teorema di Bergelson-Hindman*: In ogni colorazione finita dei naturali esistono a, b, c, d monocromatici tali che $a + b = c \cdot d$.
- *Teorema di Jin.* Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$ insiemi di naturali aventi densità asintotica superiore positiva, allora l'insieme delle somme

  $$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

  ha "buchi limitati" su intervalli arbitrariamente grandi, cioè esiste k tale che per ogni N esiste un intervallo I di lunghezza N con la proprietà ogni suo sottointervallo $J \subset I$ di lunghezza k contiene elementi di A.[3]

Un esempio di problema aperto tra i più importanti è il seguente, in cui si combina la struttura additiva e moltiplicativa dei naturali (cosa tipicamente molto difficile da ottenere, come è ben noto dalla teoria dei numeri).

- *Problema aperto*: È vero che in ogni colorazione finita dei naturali esiste una configurazione monocromatica del tipo $a, b, a + b, a \cdot b$?

Nel corso dimostreremo alcuni risultati parziali che sembrano suggerire la validità di quella congettura.

Bibliografia:

• Mac Cutcheon, *Elemental Methods in Ergodic Ramsey Theory.*
• Hindman-Strauss, *Algebra in the Stone-Cech compactification.*
• Di Nasso-Goldblatt-Lupini, *Nonstandard methods in Ramsey Theory and Combinatorial Number Theory.*
• Dispense del docente.

Pre-requisiti:

Nessun particolare pre-requisito, oltre alle nozioni generali di base fornite dal primo biennio del corso di studi in Matematica.

Modalità di esame:

• Soluzione di esercizi assegnati durante il corso.
• Seminario finale su argomento concordato col docente.
• Esame orale finale.

Maggiore sarà il numero di esercizi risolti correttamente dallo studente durante il corso su ciascuna delle parti fondamentali del programma, minore sarà la quantità di domande e l'approfondimento della prova orale finale.

[3] La densità asintotica superiore $\overline{d}(A)$ di un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è definita come:

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A \cap [1, n]}{n}.$$