## Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

### Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

**7 Gennaio 2025**

| | | |
|---|---|---|
| (Cognome) | (Nome) | (Numero di matricola) |

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

| **Proposizione** | **Vera** | **Falsa** |
|---|---|---|
| **1)** Se $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare suriettiva allora $\dim(\ker(f)) = 4$. | ☒ | ☐ |
| **2)** Ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$ appartiene a $\mathrm{Span}\{(-1,0),(2,-2)\}$. | ☒ | ☐ |
| **3)** Se l'appl. lin. associata alla matrice $A$ è iniettiva allora ogni sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ha al più una soluzione. | ☒ | ☐ |
| **4)** Sia $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^h$ un'applicazione lineare iniettiva. Allora $k \geq h$. | ☐ | ☒ |
| **5)** Siamo $A, B$ matrici $n \times n$. Se $A$ non è invertibile allora anche $B \cdot A$ non è invertibile. | ☒ | ☐ |
| **6)** Se una matrice non ha nessuna riga formata da soli zeri allora è invertibile. | ☐ | ☒ |
| **7)** Il prodotto $z \cdot \bar{z}$ di un numero complesso $z$ col suo coniugato $\bar{z}$ è un numero reale. | ☒ | ☐ |
| **8)** Se $X = \{n^2 - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $Y = \{3k \mid 1 \leq k \leq 5,\ k \in \mathbb{N}\}$ allora $X \cap Y$ contiene un unico elemento. | ☐ | ☒ |
| **9)** I vettori $u = (2,0,1)$, $v = (0,0,1)$ e $w = (2,0,0)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$. | ☐ | ☒ |
| **10)** Sia $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Se $f$ è iniettiva allora anche $g \circ f : A \to C$ è iniettiva. | ☐ | ☒ |
| **11)** $(-i)^{20} = 1$. | ☒ | ☐ |
| **12)** Due autovettori in autospazi diversi di una stessa matrice sono linearmente indipendenti. | ☒ | ☐ |

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

**7 Gennaio 2025**
**Tempo a disposizione : 120 minuti**

**Per essere considerate valide, le risposte devono essere giustificate**

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

**Esercizio 1. [6 pt.]**
Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$\overline{z} = 36\, z^3.$$

Usiamo coordinate polari, sia $z = (\rho, \theta)$.

Allora $\overline{z} = (\rho, -\theta)$ e $36 z^3 = (36\rho^3, 3\theta)$

Quindi:

$$\begin{cases} \rho = 36\rho^3 \Rightarrow \rho(36\rho^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \rho = 0 \\ \rho = 1/6 \end{matrix} \\ -\theta = 3\theta + 2k\pi \Rightarrow 4\theta = -2k\pi \Rightarrow \end{cases}$$

$$\theta = -k\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$$

(poi l'angolo si ripete)

$z_0 = 0$ (corrisponde a $\rho = 0$)

$z_1 = (1/6, 0) \Rightarrow z_1 = \frac{1}{6}$ ; $z_2 = (1/6, \pi/2) \Rightarrow z_2 = \frac{1}{6} i$

$z_3 = (1/6, \pi) \Rightarrow z_3 = -\frac{1}{6}$ ; $z_4 = (1/6, \frac{3}{2}\pi) \Rightarrow z_4 = -\frac{1}{6} i$.

**Esercizio 2.** [10 pt.]
Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare rappresentata dalla seguente matrice nella base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di $T$.
2. Determinare l'insieme $\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid T(v) = (2, 1, 3, -1)\}$.
3. Calcolare i valori $T(T(\mathbf{e}_1)), T(T(\mathbf{e}_2)), T(T(\mathbf{e}_3)), T(T(\mathbf{e}_4))$ della composizione di $T$ con se stessa sui quattro vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.
4. Determinare la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare $(T \circ T) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

1e2. Riduciamo, mettendo come colonna di termini noti il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{I e II}]{\text{scambio}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV}+\text{I}}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array} \end{array}$$

La matrice ha 3 colonne pivot e una colonna libera.
Quindi, $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$
e $\dim(\ker(T)) = 1$.

Una base dell'immagine si ottiene prendendo i vettori delle colonne pivot nella matrice iniziale:

$$\text{base immagine} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$x_4$ è la variabile libera. Per trovare il vettore che costituirà la base del nucleo, risolviamo il sistema omogeneo associato ponendo $x_4 = 1$

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_4 = 0 & \Rightarrow \quad x_1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = 0 & \Rightarrow \quad x_2 = 0 \\ x_3 = 0 & \Rightarrow \quad x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{base nucleo} = \{ \vec{s} \}$$

Una soluzione particolare del sistema si può trovare ponendo la variabile libera $x_4 = 0$

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_4 = 1 & \Rightarrow \quad x_1 = 1 \\ x_2 = 2 & \Rightarrow \quad x_2 = 2 \\ x_3 = 3 & \Rightarrow \quad x_3 = 3 \end{cases} \qquad \vec{s}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{v} + \vec{s}_p \mid \vec{v} \in \ker T \right\} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + 1 \\ 2 \\ 3 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

3. $T(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Infatti $A \cdot e_1 = \left[ \vec{c_1} \middle| \vec{c_2} \middle| \vec{c_3} \middle| \vec{c_4} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$

$1 \cdot \vec{c_1} + 0 \cdot \vec{c_2} + 0\, \vec{c_3} + 0 \cdot \vec{c_4} = \vec{c_1}$ e' il primo vettore colonne di A.

Analogamente $T(e_2) = A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' il secondo vettore colonne, $T(e_3) = A \cdot e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' il terzo vettore colonna, e $T(e_4) = A \cdot e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e' il quarto vettore colonna.

Allora $T(T(e_1)) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = c_2 - c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$T(T(e_2)) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$T(T(e_3)) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e

$T(T(e_4)) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -c_2 + c_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. L'applicazione lineare $T \circ T$ ha come matrice associata la matrice avente come colonne $(T \circ T)(e_1)$, $(T \circ T)(e_2)$, $(T \circ T)(e_3)$ e $(T \circ T)(e_4)$, già calcolati nel punto 3, quindi

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alternativamente si poteva calcolare B notando che $B = A \cdot A$ dove A è la matrice associata a T.

Riduciamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}+\mathrm{I}]{\mathrm{II}-\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV}+\mathrm{II}}$$

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

C'è una variabile libera quindi la dimensione del nucleo è 1.

**Esercizio 3. [10 pt.]**
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di $A$ e la loro molteplicità algebrica.
2. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
3. Determinare una matrice invertibile $S$ e una matrice diagonale $D$ tali che $D = S^{-1}AS$.

1. Il polinomio caratteristico

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

(sviluppo lungo la I riga) $\quad (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$ (sviluppo lungo la II riga)

$$= (-1-\lambda)(-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2 \left[ -\lambda(2-\lambda) - 0 \right]$$

$$= \lambda (\lambda+1)^2 (\lambda-2) = 0 \iff \begin{array}{ll} \lambda = 0 & \text{m.a. } 1 \\ \lambda = -1 & \text{m.a. } 2 \\ \lambda = 2 & \text{m.a. } 1 \end{array}$$

2. • $\lambda = 0$ $\quad Aut(A,0) = ker(A - 0 \cdot I) = ker(A)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-2I]{II-2I} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio } II \leftrightarrow IV}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+III]{} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

La variabile libera e' $x_4$. Per trovare la soluzione speciale si risolve il sistema omogeneo ponendo $x_4 = 1$

$$\begin{cases} -x_1 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 & \Rightarrow x_2 + x_3 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \\ -x_3 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base dell'autospazio dell'autovalore $\lambda = 0$ $\quad B_{\lambda=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Quindi la molt. geometrica di $\lambda = 0$ e' 1.

• $\lambda = -1$ $\quad Aut(A,-1) = ker(A - (-I)) = ker(A + I)$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio } I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV-I}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{IV}]{\text{scambio}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & L & L & P \end{array} \end{array}$$

$x_2$ e $x_3$ sono le variabili libere.

Troviamo le due soluzioni speciali:

$$x_2 = 1, \; x_3 = 0 \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow -2x_1 + 1 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ 3x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x_2 = 0, \; x_3 = 1 \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow -2x_1 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ 3x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi $\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Una base dell'autospazio dell'autovalore $\lambda = -1$

e' $B_{\lambda=-1} = \left\{ \vec{s}_2, \vec{s}_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Quindi la molteplicita' geometrica di $\lambda = -1$ e' 2.

- $\lambda = 2$ $\quad Aut(A,2) = \ker(A - 2I)$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV} - \frac{2}{3}\mathrm{I}]{\mathrm{II} - \frac{2}{3}\mathrm{I}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV} + \frac{1}{2}\mathrm{II}}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV} + \frac{1}{2}\mathrm{III}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

La variabile libera e' $x_4$. Per trovare la soluzione speciale si risolve il sistema omogeneo ponendo $x_4 = 1$.

$$\begin{cases} -3x_1 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 & \Rightarrow -2x_2 + 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \qquad \vec{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base dell'autospazio dell'autovalore $\lambda = 2$ e'

$$\mathcal{B}_{\lambda=2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Quindi la molt. geometrica di $\lambda = 2$ e' 1.

3. Visto che tutti gli autovalori sono reali e le molteplicita' algebrica e geometrica coincidono per ognuno degli autovalori, la matrice A e' diagonalizzabile.

Una base formata da autovettori è la seguente:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\lambda=0 \qquad \lambda=-1 \qquad \lambda=-1 \qquad \lambda=2$

Quindi se consideriamo la matrice "cambio di base"

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ si ha che

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è la matrice diagonale avente sulla diagonale gli autovalori ripetuti con la loro molteplicità.

**Esercizio 4.** [6pt.]

1. Determinare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:
   - Il vettore $v_1 = (0, 0, 1)$ è un autovettore con autovalore $-2$;
   - Il vettore $v_2 = (1, 1, 0)$ è un autovettore con autovalore $1$;
   - $f$ non è invertibile.

2. Scrivere la matrice $A$ associata a $f$ rispetto alla base canonica.

3. Esiste un'unica applicazione lineare $f$ che soddisfa le proprietà (1)? Se sì, motiva la risposta; se no, mostra due esempi distinti di appl. lineari che soddisfano (1).

1 e 2. $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Per avere $f$ NON invertibile, prendiamo un vettore che insieme a $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ formi una base, ad esempio $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, e imponiamo che

$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. In questo modo $\ker f \neq \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

e $f$ non e' invertibile.

Notiamo che $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Quindi conosciamo i valori di $f$ sui tre vettori della base canonica: $f(e_1)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $f(e_2)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $f(e_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ e quindi la matrice associata e'

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

3. No, una tale $f$ NON e' unica. Infatti dobbiamo porre $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ma per avere $f$ non invertibile basta fare in modo che $f$ NON sia iniettiva. Ad esempio si puo' porre $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$.

In questo caso $f(e_1)=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$, $f(e_2)=f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$
e $f(e_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$.

Quindi la matrice associata a questa $f$ e'

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Si puo' verificare che $B \neq A$ soddisfa tutte le proprieta' richieste.